Funktsionaalanalüüsi mõisted

Indrek Mandre

January 4, 2009

Abstract

Frederik Vichmanni raamatu "Funktsionaalanalüüsi elementaarkursus" mõisted indexi alusel, 1.-3. peatükk.

1.1 Meetrilise ruumi mõiste

meetriline ruum(1) Hulka X nimetatakse meetriliseks ruumiks, kui selle hulga elementide igale paarile x, y on ühesel viisil seatud vastavusse reaalarv $\rho(x, y)$, mis rahuldab kolme aksioomi:

samasusaksioom $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

sümmeetriaaksioom $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

kolmnurgaaksioom $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \qquad \forall z \in X$

ruumi element e. punkt Meetrilise ruumi X elemente nimetatakse sageli ka punktideks.

ruumi elementide vaheline kaugus; kaugus Arvu $\rho(x, y)$ nimetatakse meetrilise ruumi elementide x ja y vaheliseks kauguseks.

jada piirpunkt; jada piirväärtus(2) Punkti x nimetatakse jada $\{x_n\}$ piirpunktiks (piirväärtuseks), kui suvalise $\epsilon > 0$ korral leidub naturaalarv n_0 nii, et iga $n > n_0$ puhul kehtib võrratus $\rho(x, x_n) < \epsilon$.

$$x_n \to x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N : \forall n > n_0 \Rightarrow \rho(x, x_n) < \varepsilon$$

koonduv jada Kui jadal on piirpunkt, siis nimetatakse teda koonduvaks ja kirjutatakse

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x$$

Meetrilises ruumis võib jadal olla ülimalt üks piirpunkt ning koonduva jada iga osajada koondub samaks piirpunktiks.

lahtine kera; kinnine kera Olgu x_0 meetrilise ruumi X fikseeritud punkt ($x_0 \in X$) ning r positiivne arv ($r \in R,\ r > 0$). Lahtiseks keraks $S(x_0, r)$ (kinniseks keraks $\overline{S}(x_0, r)$) nimetatakse punktide x hulka, mis rahuldavad tingimust $\rho(x, x_0) < r$ ($\rho(x, x_0) \leq r$).

$$\begin{aligned} S(x_0, r) &= \{x \in X | \rho(x, x_0) < r\} \\ \overline{S}(x_0, r) &= \{x \in X | \rho(x, x_0) \leq r\} \end{aligned}$$

kera keskpunkt Siin x_0 on kera keskpunkt

kera raadius ja arv r on kera raadius.

ϵ-ümbrus; ümbrus Iga lahtist kera, mille kekpunkt on x_0 ja raadius ϵ ($\epsilon > 0$), nimetatakse selle punkti x_0 ümbruseks (ϵ-ümbruseks).

tõkestatud hulk Meetrilise ruumi hulka D nimetatakse tõkestatuks, kui leidub mingi seda hulka sisaldav kera $S(x_0, r)$. Näiteks koonduv jada on tõkestatud.

puutepunkt Punkti x nimetatakse hulga D puutepunktiks, kui punkti x iga ümbrus sisaldab vähemalt ühe hulga D punkti.

hulga sulund(3) Hulga D kõikide puutepunktide hulka nimetatakse hulga D sulundiks ja tähistatakse $\overline{D}$.

kinnine hulk Hulk D on kinnine, kui $\overline{D} = D$.

lahtine hulk Hulk D on lahtine, kui $X \backslash D$ on kinnine.

kõikjal tihe hulk Hulka D nimetatakse kõikjal tihedaks, kui $\overline{D} = X$.

separaabel ruum Meetrilist ruumi X nimetatakse separaabliks, kui ta sisaldab kõikjal tiheda loenduva hulga.

1.2 Meetriliste ruumide näited

n-mõõtmeline Eukleidiline ruum E^n Hulk X reaalsete koordinaatidega n-mõõtmeliste vektorite hulk, kus siis elemendid on esitatavad $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, $y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$ ja kus kaugus on defineeritud

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \eta_k)^2}.$$

ruum m_n(4) n-mõõtmeliste vektorite hulk ($x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, $y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$), kus meetrika on defineeritud

$$\rho(x, y) = \max_k |\xi_k - \eta_k| .$$

hulga ülemraja Arvu $M \in R$ nimetatakse arvuhulga $F \subset R$ ülemtõkkeks, kui iga $x \in F$ korral $x \leq M$. Vähimat võimalikku ülemtõket nimetatakse hulga F ülemrajaks $\sup F$.

hulga alamraja Arvu $m \in R$ nimetatakse arvuhulga $F \subset R$ alamtõkkeks, kui iga $x \in F$ korral $x \geq m$. Suurimat võimalikku alamtõket nimetatakse hulga F alamrajaks $\inf F$.

tõkestatud jadade ruum m Tõkestatud arvjadade hulk ($x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...)$, $y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n, ...)$), kus meetrika on defineeritud

$$\rho(x, y) = \sup_k |\xi_k - \eta_k| .$$

koonduvate jadade ruum c Ruumi m osa, mis koosneb kõigist koonduvatest jadadest.

ruum l^p $(p \geq 1)$**(5)** Hulk, mille elemendid on arvjadad $\{\xi_k\}$, mille korral

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < +\infty$$

Jadade $x = \{\xi_k\}$ ja $y = \{\eta_k\}$ vaheline kaugus defineeritakse valemiga

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \eta_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

tõkestatud funktsioonide ruum $M[a, b]$ Kõigi lõigul $[a, b]$ tõkestatud funktsioonide hulk ning $x = x(t)$ ja $y = y(t)$ suvalised elemendid sellest hulgast. Siis kaugus on defineeritud

$$\rho(x, y) = \sup_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)| .$$

operaatori tuletis ???

pidevate funktsioonide ruum $C[a, b]$ Ruumi $M[a, b]$ osa, mis koosneb kõigis lõigul $[a, b]$ pidevatest funktsioonidest, nimetatakse pidevate funktsioonide ruumiks ja tähistatakse $C[a, b]$. Kuna lõigul pideval funktsioonil on olemas maksimaalne väärtus, siis võib kauguse esitada kasutades

$$\rho(x, y) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$$

ekvivalentsed funktsioonid(6) Olgu $p \geq 0$ fikseeritud reaalarv ning X lõigul $[a, b]$ määratud funktsioonide $x(t)$ hulk, mis rahduldavad tingimust (Lebesgue integraal)

$$\int_a^b |x(t)|^p \, dt < +\infty.$$

Funktsioone $x(t)$ ja $y(t)$ loeme ekvivalentseteks hulgal X, kui nad erinevad teineteisest hulgal, mille mõõt on null.

ruum $L^p[a, b]$ Antud hulgal X, kui meetrika on defineeritud

$$\rho(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

Hilberti funktsionaalruum $L^2[a, b]$ Ruum $L^p[a, b]$, kus siis $p = 2$ ja meetrika tuleb vastavalt.

1.3 Täielikud meetrilised ruumid

fundamentaaljada Jada $\{x_n\}$ nimetatakse fundamentaalseks (fundamentaaljadaks) (Cauchy jadaks), kui suvalise $\epsilon > 0$ korral leidub naturaalarv n_0 nii, et iga $n, m > n_0$ puhul kehtib võrratus $\rho(x_n, x_m) < \epsilon$.

$$\text{fundamentaaljada} \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\epsilon)\ :\ \forall n, m > n_0 \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \epsilon$$

täielik meetriline ruum(7) Meetrilist ruumi nimetatakse täielikuks, kui iga tema fundamentaaljada koondub selle ruumi punktiks. Ruumid m_n, m, c, l^p, $M[a, b]$ ja $L^p[a, b]$ on täielikud ruumid.

teoreem üksteisesse sisestatud keradest(8) Kui täielikus meetrilises ruumis X on antud kinniste kerade jada

$$\overline{S}(x_1, \epsilon_1),\ \overline{S}(x_2, \epsilon_2),\ ...,\ \overline{S}(x_n, \epsilon_n),\ ...$$

kus iga järgmine kera sisaldub eelmises ja kerade raadiused ϵ_n lähenevad nullile (kui $n \to \infty$), siis leidub üks ja ainult üks punkt, mis sisaldub kõikides nendes kerades.

1.4 Banachi püsipunkti printsiip

operaator Kui on antud eeskiri A, mis seab hulga X_1 igale elemendile x vastavusse hulga Y kindla elemendi y, siis öeldakse, et on defineeritud operaator A, mis toimib hulgast X_1 hulka Y.

$$y = A(x) \qquad \text{või} \qquad A : X_1 \to Y$$

kujutus Sageli kõneldakse operaatori asemel kujutusest.

punkti kujutis Seejuures nimetatakse kujutuses $A : X_1 \to Y$punktile $x \in X_1$ vastavat punkti $y \in Y$ punkti x kujutiseks

punkti originaal ja ümberpööradult, punkti x punkti y originaaliks.

ahendav operaator; lähenemisoperaator(9) Olgu operaator $A : X \to X$. Operaatorit A nimetatakse ahendavaks operaatoriks (lähenemisoepraatoriks), kui ruumi X suvaliste punktide x ja x' korral kehtib võrratus

$$\rho(A(x), A(x')) \le q\rho(x, x'),$$

kus $0 < q < 1$.

operaatori püsipunkt Operaatori $A : X \to X$ püsipunktiks nimetatakse igat punkti x^*, mille korral

$$A(x^*) = x^*.$$

Banachi püsipunkti printsiip Teoreem: Täielikus meetrilises ruumis X on igal ahendaval operaatoril A üks ja ainult üks püsipunkt x^*.

harilik iteratsioonimeetod(10) Püsipunkti leidmine. Lahendi x^* lähend x_n leitakse eelenvast lähendist x_{n-1} valemiga $x_n = A(x_{n-1})$. Lahendi viga on siin

$$\rho(x^*, x_n) \le \frac{\alpha q^n}{1 - q}$$

kus siis $0 < q < 1$ ja $\alpha = \rho(x_0, x_1)$.

1.5 Kompaktsus

kompaktne hulk(12) Meetrilise ruumi X hulka K nimetatakse kompaktseks, kui selle hulga igast jadast saab eraldada koonduva osajada.

endas kompaktne hulk Kui nende osajadade piirpunktid kuuluvad hulka K, siis nimetatakse seda hulka endas kompaktseks, vastasel juhul aga kompaktseks ruumis X.

kompakt Kompaktset meetrilist ruumi nimetatakse kompaktiks. Kompakt on täielik ruum.

funktsionaal Operaatorit, mille väärtused on arvud, nimetatakse funktsionaaliks.

pidev funktsionaal Funktsionaali f nimetatakse pidevaks punktis x, kui iga punktiks x koonduva jada $\{x_n\}$ korral

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

ϵ-võrk(14) Meetrilise ruumi X hulka P nimetatakse hulga M ϵ-võrguks, kui hulga M iga punkti x korral leidub punkt $x_\epsilon \in P$ nii, et

$$\rho(x, x_\epsilon) < \epsilon.$$

Hausdorffi teoreem Meetrilise ruumi X hulga M kompaktsuseks on tarvilik ning ruumi X täielikkuse korral ka piisav, et iga $\epsilon > 0$ korral oleks hulgal M lõplik ε-võrk.

Arzelà teoreem Hulk $M = \{x(t)\}$ ruumis $C[a, b]$ on kompaktne siis ja ainult siis, kui

ühtlaselt tõkestatud funktsioonid hulk M on ühtlaselt tõkestatud, st. leidub konstant $L > 0$ nii, et

$$|x(t)| \le L \qquad \forall x(t) \in M, \qquad \forall t \in [a, b];$$

võrdastmeliselt pidevad funktsioonid hulk M on võrdastmeliselt pidev, s.t. iga $\epsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et

$$|x(t_1) - x(t_2)| < \epsilon \qquad \forall x(t) \in M$$

ja iga t_1 ja t_2 korral, mis rahuldavad võrratust $|t_1 - t_2| < \delta$.

2.1 Lineaarse ruumi mõiste

lineaarne ruum; vektorruum(15) Hulka X nimetatakse lineaarseks ruumiks ehk vektorruumiks, kui hulgal X on defineeritud elementide summa $x + y$ ja elemendi korrutis skalaariga λx, mis kuuluvad hulka X, nii, et kehtivad järgmised aksioomid: (8 aksioomi).

1. $x + y = y + x \qquad \forall x, y \in X;$

2. $x + (y + z) = (x + y) + z \qquad \forall x, y, z \in X$;
3. leidub nullelement $\theta \in X$, mis rahuldab tingimust
$$x + \theta = x \qquad \forall x \in X;$$
4. leidub vastandelement $-x \in X$, mis rahuldab tingimust $x+(-x) = \theta$;
5. $1x = x \qquad \forall x \in X$;
6. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x \qquad \forall x \in X,\ \forall \lambda, \mu \in R$;
7. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \qquad \forall x \in X,\ \forall \lambda, \mu \in R$;
8. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \qquad \forall x, y \in X,\ \forall \lambda \in R$.

vastandelement Lineaarses vektorruumis on igal elemendil $x \in X$ vastandelement $-x \in X$, mis rahuldab tingimust $x + (-x) = \theta$.

nullelement Lineaarses vektorruumis leidub nullelement $\theta \in X$, mis rahuldab tingimust
$$x + \theta = x \qquad \forall x \in X.$$

kompleksne lineaarne ruum Vektorruum defineeritud skalaariga (koos vastavate aksioomidega), mis on kompleksarv, nimetatakse kompleksseks lineaarseks ruumiks.

alamruum(16) Lineaarse ruumi X osahulka X_1 nimetatakse alamruumiks, kui hulk X_1 on kinnine ruumis X defineeritud tehete suhtes, see on iga $x, y \in X_1$ ja $\lambda \in R$ korral $x + y \in X_1$ ja $\lambda x \in X_1$.

lineaarlset sõltumatud elemendid Elemente $x_1, x_2, ..., x_k$ nimetatakse lineaarselt sõltumatuteks, kui võrdusest
$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_k x_k = \theta$$
järgneb, et
$$\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0.$$

lineaarselt sõltuvad elemendid(17) Vastupidi, kui leiduvad sellised
$$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k,$$
mis ei ole samaaegselt nullid ja mille korral
$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_k x_k = \theta$$
siis nimetatakse elemente $x_1, x_2, ..., x_k$ lineaarselt sõltuvateks.

elementide lineaarne kombinatsioon Kui
$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n,$$
siis öeldakse, et element x on elementide $x_1, x_2, ..., x_n$ lineaarne kombinatsioon.

n-dimensionaalne ruum; n-mõõtmeline ruum Lineaarset ruumi nimetatakse n-mõõtmeliseks (n-dimensionaalseks), kui selles ruumis on maksimaalselt n lineaarselt sõltumatut elementi.

ruumi baas Igat sellist n lineaarselt sõltumatute elementide hulka nimetatakse lineaarse ruumi baasiks.

lõpmatudimensionaalne ruum; lõpmatumõõtmeline ruum Kui iga naturaalarvu n korral leidub ruumis n lineaarselt sõltumatut elementi, siis nimetatakse ruumi lõpmatumõõtmeliseks (lõpmatudimensionaalseks).

hulga lineaarne kate; lineaarne kate Olgu antud lineaarse ruumi mingi alamhulk A, lõplik või lõpmatu. Kõigi lineaarsete kombinatsioonide

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_k x_k$$

hulka L, kus $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ on suvalised skalaarid ja $x_1, x_2, ..., x_k$ on suvalised elemendid antud alamhulgast, nimetatakse hulga A lineaarseks katteks.

2.2 Lineaarne normeeritud ruum

lineaarne normeeritud ruum Lineaarset ruumi X nimetatakse lineaarseks normeeritud ruumiks, kui igale elemendile $x \in X$ on seatud vastavusse reaalarv $\|x\|$, mida nimetatakse

elemendi norm elemendi x normiks ja mis rahuldab tingimusi ehk

normi aksioomid nn. normi aksioome:

1. $\|x\| \geq 0$, kusjuures $\|x\| = 0$ siis ja ainult siis, kui $x = \theta$;
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall x, y \in X$;
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \qquad \forall x \in X, \ \forall \lambda \in R$

Võttes $\rho(x, y) = \|x - y\|$ saame meetrilise ruumi.

normi järgi koonduvus ehk tugev koonduvus(18) Normi aksioomide järgi on iga lineaarne normeeritud ruum meetriline ruum, mistõttu piirväärtus $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ saab tähenduse

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

Banachi ruum Täielikku lineaarselt normeeritud ruumi nimetatakse Banachi ruumiks.

lineaarne alamruum(19) Kui lineaarse normeeritud ruumi alamhulk L on kinnine lineaarses ruumis defineeritud tehete suhtes ja on kinnine normi järgi koonduvuse mõttes (s.t. $\overline{L} = L$), siis nimetatakse seda alamhulka lineaarseks alamruumiks.

põhihulk Lineaarse normeeritud ruumi X alamhulka L, mille lineaarne kate on kõikjal tihe ruumis X, nimetatakse selle ruumi põhihulgaks.

2.3 Hilberti ruum

unitaarne ruum(20) Kompleksset lineaarset ruumi X nimetatakse unitaarseks ruumiks, kui selle ruumi igale kahele elemendile x ja y on seatud vastavusse kompleksarv (x, y), mida nimetatakse

skalaarkorrutis nende elementide skalaarkorrutiseks ja mis rahuldab aksioome:

1. $(x, y) = \overline{(y, x)} \qquad \forall x, y \in X;$
2. $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1(x_1, y) + \lambda_2(x_2, y) \qquad \forall x_1, x_2 \in X,\ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in C;$
3. $(x, x) \geq 0 \qquad \forall x \in X;$
4. $(x, x) = 0$ siis ja ainult siis, kui $x = \theta$.

Defineerides normi $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ saame lineaarse normeeritud ruumi.

eukleidiline ruum Kui skalaarkorrutis on defineeritud reaalse lineaarse ruumi X peal. See on eukleidiline ruum.

Hilberti ruum Hilberti ruumiks nimetatakse täielikku unitaarset ruumi.

Cauchi-Binjakovski võrratus Unitaarse ruumi omadus. Iga $x, y \in X$ korral

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)} = \|x\| \, \|y\| \, .$$

elementide vaheline nurk(21)

$$\cos \varphi = \frac{|(x, y)|}{\|x\| \, \|y\|}$$

elementide ortogonaalsus Elemendid x ja y on ortogonaalsed, kui $\cos \varphi = 0$. $x \perp y$.

ortogonaalne alamruum Kui element x on ortogonaalne alamruumi $L \subset X$ iga elemendiga, siis öeldakse, et element x on ortogonaalne alamruumiga L. $x \perp L$.

elemendi projektsioon alamruumile Teoreem: Hilberti ruumi H suvalise alamruumi L ja elemendi $x \in H$ korral leiduvad üheselt määratud elemendid $y \in L$ ja $z \perp L$ nii, et

$$x = y + z.$$

Elementi y viimases võrduses nimetatakse elemendi x projektsiooniks alamruumile L.

2.4 Ortonormaalsed süsteemid

ortonormeeritud baas(22) Olgu n-mõõtmeline ruum. Ortonormeeritud baas on baas $e_1, e_2, ..., e_n$, mille elementide korral

$$(e_i, e_k) = \begin{cases} 0, & \text{kui } i \neq k \\ 1, & \text{kui } i = k \end{cases}$$

Gram-Schmdti ortogonaliseerimisprotsess Suvalisest n-mõõtmelise ruumi baasist ortonormeeritud baasi konstrueerimine. Olgu antud $x_1, x_2, ..., x_n$.

$$e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$$

$$h_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_{ki} e_i \qquad k = 2, ..., n$$

$$c_{ki} = (x_k, e_i)$$

$$e_k = \frac{h_k}{\|h_k\|}$$

ortonormaalne süsteem Kui antud ruum X on lõpmatumõõtmeline, siis võib vaadelda loenduvaid ortonormaalseid süsteeme $e_1, e_2, ..., e_n, ...$ Analoogiliselt eelnevaga võib suvalisest loenduvast lineaarselt sõltumatute elementidega süsteemist lähtudes konstrueerida loenduva ortonormaalse süsteemi.

Fourier' kordajad(23) Arve $c_k = (x, e_k)$ nimetatakse elemendi x Fourier' kordajateks ortonormaalse süsteemi $\{e_k\}$ järgi.

Besseli võrratus Hilberti ruumi X iga elemendi x ja selle Fourier' kordajate $c_k = (x, e_k)$ korral:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|^2 .$$

täielik ortonormaalne süsteem(24) Hilberti ruumi X ortonormaalset süsteemi $\{e_k\}$ nimetatakse täielikuks, kui ei leidu nullelemendist erinevat elementi $x \in X$, mis oleks ortogonaalne süsteemi iga elemendiga.

kinnine ortonormeeritud süsteem Ortonormaalset süsteemi nimetatakse kinniseks, kui selle lineaarse katte sulund ühtib ruumiga X.

Fourier' rida Kui ortonormaalne süsteem on kinnine, siis suvalise elemendi $x \in X$ Fourer' rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \qquad (c_k = (x, e_k)\ k = 1, 2, ...)$$

koondub elemendiks x ja kehtib

Parsevali võrdus Parsevali võrdus

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2$$

ortonormeeritud baas Kinnist ortonormaalset süsteemi nimetatakse ortonormeeritud baasiks.

parima lähenduse polünoom Olgu X_n ruumi X n-mõõtmeline alamruum ja x suvaline element ruumis X. Elementi $y^* \in X_n$, mille kaugus elemendist x on minimaalne, nimetatakse elemendi parima lähenduse polünoomiks alamruumis X_n. Seega y^* on parima lähenduse polünoom, kui iga $y \in X_n$ korral $\|x - y^*\| \leq \|x - y\|$.

keskmise lähendamise meetod(25) Olgu $X = L^2[a,b]$ ja X_n funktsioonide $1, t, t^2, ..., t^{n-1}$ poolt määratud alamruum. Suvalise funktsiooni $x(t)$ parima lähenduse polünoomi

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k t^{k-1}$$

kordajad α_k $(k = 1, 2, ..., n)$ avalduvad momentideks nimetatavate suuruste

$$\beta_k = \int_a^b x(t)t^{k-1}dt \ (k = 1, 2, ..., n)$$

kaudu. Vaadeldav aproksimatsioon kannab keskmise lähendamise meetodi nimetust.

3.1 Lineaarsed operaatorid

aditiivne operaator(27) Olgu E ja E_1 lineaarsed normeeritud ruumid ja A operaator ruumist E ruumi E_1. Operaatorit A nimetatakse aditiivseks, kui

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 \qquad \forall x_1, x_2 \in E$$

homogeenne operaator Operaatorit A nimetatakse homogeenseks, kui iga reaalarvu λ korral

$$A(\lambda x) = \lambda Ax \qquad \forall x \in E$$

lineaarne operaator Operaatorit A nimetatakse lineaarseks, kui ta on aditiivne ja homogeenne.

pidev operaator Operaatorit A nimetatakse pidevaks punktis $x_0 \in E$, kui iga $\epsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et kehtib võrratus

$$\|Ax - Ax_0\| < \epsilon$$

iga x korral, mis rahuldab võrratust $\|x - x_0\| < \delta$. Operaatorit A nimetatakse pidevaks, kui ta on pidev ruumi E igas punktis.

ühikoperaator Lineaarne ja pidev ühikoperaatori I korral

$$Ix = x$$

3.2 Tõkestatud operaator

tõkestatud operaator(31) Operaatorit A nimetatakse tõkestatuks, kui leidub konstant M nii, et iga $x \in E$ korral

$$\|Ax\| \leq M\|x\|$$

3.3 Operaator norm

operaatori norm(33) Vähimat arvudest M, mis rahuldavad võrratust

$$\|Ax\| \leq M\|x\| \qquad \forall x \in E$$

nimetatakse operaatori A normiks ja tähistatakse $\|A\|$.

3.4 Pidevate lineaarsete operaatorite ruum

pidevate lineaarsete operaatorite ruum(37) Olgu E ja E_1 lineaarsed normeeritud ruumid. Vaatleme lineaarsete operaatorite hulka, mis teisendavad ruumi E ruumi E_1. Selle ruumi alamruumi $(E \to E_1)$, mis koosneb pidevatest operaatoritest. Seal ruumis saab normiks võtta operaatori normi $\|A\|$. Seega on pidevate lineaarsete operaatorite ruum $(E \to E_1)$ lineaarne normeeritud ruum.

kaasruum Erijuhul, kui $E_1 = E^1$, saame ruumis E määratud pidevate lineaarsete funktsionaalide ruumi, mida nimetatakse ruumi E kaasruumiks ja tähistatakse E^*.

3.5 Banach-Steinhausi teoreem

ühtlane koonduvus(39) Olgu antud pidevad lineaarsed operaatorid $A_n : E \to E_1$ $(n = 1, 2, ...)$. Ruumis $(E \to E_1)$ on jada $\{A_n\}$ jaoks defineeritud normi järgi koonduvus. Operaator $A \in (E \to E_1)$ on jada $\{A_n\}$ piirväärtus, kui

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0.$$

Seda koonduvust normi järgi nimetatakse ka operaatorite jada ühtlaseks koonduvuseks.

koonduvus igas punktis (kõikjal) Teine koonduvus, nimelt kus igas punktis $x \in E$ eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} A_n x = Ax.$$

Need kaks koonduvuse liiki on omavahel seotud. Et iga $x \in E$ korral

$$\|A_n x - Ax\| \le \|A_n - A\| \, \|x\|$$

siis järgneb jada $\{A_n\}$ ühtlasest koonduvusest alati koonduvus igas punktis (kõikjal ruumis E).

Banach-Steinhausi teoreem Kui ruumid E ja E_1 on Banachi ruumid, siis jada $\{A_n x\}$ koonduvuseks igas punktis $x \in E$ (kõikjal ruumis E) on tarvilik ja piisav:

1. $\|A_n\| \le M \quad (n = 1, 2, ...)$;
2. piirväärtus $\lim_{n\to\infty} A_n x$ eksisteerib hulgal G, mis on ruumis E kõikjal tihe.

mehaaniline kvadratuur(42) Olgu $x = x(t) \in C[a, b]$ ja

$$A_n x = \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} x(t_k^{(n)}) \approx \int_a^b x(t)dt,$$

kus $c_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, ..., n)$ on antud arvud ja $t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < ... < t_n^{(n)} \in [a, b]$. Antud summad määravad iga $n = 1, 2, ...$ korral pideva lineaarse funktsionaali ruumis $C[a, b]$. Tekib küsimus, millal $\lim_{n\to\infty} A_n x = Ax$ iga $x(t) \in$

$C[a,b]$ korral. Antud summasid nimetatakse mehaanilisteks kvadratuurideks. Integraalide ligikaudse arvutamise tuntud valemid nagu ristkülikute, trapetsite, Simpsoni ja Gaussi valem on mehaaniliste kvadratuuride erijuhud.

Szegö teoreem Mehaaniliste kvadratuuride integraaliks $\int_a^b x(t)dt$ koonduvuse jaoks iga pideva funktsiooni $x(t)$ korral, kui $n \to \infty$, on tarvilik ja piisav:

1. $\sum_{k=1}^{n} \left| c_k^{(n)} \right| \leq M \qquad (n = 1, 2, ...);$
2. mehaanilised kvadratuurid koonduvad integraaliks iga polünoomi korral (või astmete t^k $(k = 0, 1, ...)$ korral).

Kojima-Schuri teoreem(43) Olgu antud võrdused $(n = 1, 2, ...)$

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \xi_k,$$

kus $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...)$ ja $y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n, ...)$. Millistel tingimustel lõpmatu maatriksi (a_{nk}) suhtes kujutab antud võrdustega teisendus iga koonduva jada x koonduvaks jadaks y, s.o. vastav operaator kuulub ruumi $(c \to c)$?
Teoreem: antud teisendus kujutab iga koonduva jada $\{\xi_k\}$ koonduvaks jadaks $\{\eta_k\}$ siis ja ainult siis, kui

1. $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq M \qquad (n = 1, 2, ...);$
2. eksisteerib piirväärtus $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk};$
3. eksisteerib piirväärtus $\lim_{n\to\infty} a_{nk} \qquad (k = 1, 2, ...);$

3.6 Pöördoperaator

pöördoperaator(44) Olgu E ja E_1 lineaarsed normeeritud ruumid ja A operaator ruumist E ruumi E_1. Kui eksisteerib operaator $A^{-1} : E_1 \to E$, mille korral

$$A^{-1}Ax = x \qquad \forall x \in E$$

ja

$$AA^{-1}y = y \qquad \forall y \in \widetilde{E_1},\ \widetilde{E_1} = \{y | y = Ax, \forall x \in E\},$$

siis nimetatakse operaatoreid A ja A^{-1} teineteise suhtes pöördoperaatoriteks.

vasakpoolne pöördoperaator Kui operaator rahuldab ainult esimest või teist, siis nimetatakse seda operaatorit vastavalt operaatori A vasakpoolseks

parempoolne pöördoperaator või parempoolseks pöördoperaatoriks.

3.7 Parameetrist sõltuvad operaatorid

mittehomogeensed võrrandid(46) Olgu E lineaarne normeeritud ruum, $A \in (E \to E)$ ja λ mingi parameeter. Vaatleme mittehomogeenset võrrandit

$$Ax - \lambda x = y \qquad \text{ehk} \qquad (A - \lambda I)x = y$$

homogeenne võrrand(47) ja temale vastavat homogeenset võrrandit

$$Ax - \lambda x = \theta \qquad \text{ehk} \qquad (A - \lambda I)x = \theta.$$

triviaalne lahend Homogeense võrrandi $(A - \lambda I)x = \theta$ lahend $x = \theta$.

omaväärtus Arv λ homogeenses võrrandis nullelemendist erineval lahendil nimetatakse operaatori A omaväärtusesks.

omavektor Operaatori omaväärtusele λ vastavat homogeense võrrandi mittetriviaalne lahendit x nimetatakse operaatori A omavektoriks.

resolvent Operaatorit $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$, mis on määratud kogu ruumis E ja on tõkestatud, nimetatakse operaatori resolvendiks.

regulaarne väärtus Parameetri λ väärtusi, mille korral eksisteerib resolvent, nimetatakse operaatori A regulaarseteks väärtusteks.

spekter Kõik parameetri λ ülejäänud väärtused kannavad spektri nimetust. Seega koosneb lõplikumõõtmelise ruumi E korral spekter ainult omaväärtustest.

diskreetne spekter Olukord võib olla teine lõtmatumõõtmelise ruumi E korral. Võib lisanduda nimelt kolmas võimalus: homogeensel võrrandil on ainult triviaalne lahend, kuid operaator $(A - \lambda I)^{-1}$ ei ole määratud kogu ruumis E (ja võib-olla ei ole tõkestatud). Omaväärtuste (diskreetne spekter)

pidev spekter kõrval võib esineda nn. pidev spekter, kui resolventi ei ole määratud kõikjal lõpmatumõõtmelises ruumis. Seega parameetri λ iga väärtus on kas regulaarne väärtus, omaväärtus või pideva spektri punkt.