

Harmonilisest Analüüsist Lainikuteni

TTÜ, Kaasaegse Matemaatika Meetodite Eriseminar

Indrek Mandre <indrek(at)mare.ee>

14. aprill 2011. a.

1 Funktsionaalanalüüsi elemente

1.1 Ruum $L^2[a, b]$

Vaatame lõigul $[a, b] \subset \mathbb{R}$ määratud kompleksarvulisi funktsioone $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, mis rahuldavad tingimust

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < +\infty.$$

Tegu on antud lõigul integreeruva ruuduga funktsioonidega¹. Kui funktsiooni vaadata kui ajas muutuvat signaali $f(t)$, siis antud piirang tähendab, et signaali energia on lõplik.

Definitsioon 1.1. (Hulk $L^2[a, b]$) Tähistame kõigi selliste funktsioonide hulga kui $L^2[a, b]$, s.t.

$$L^2[a, b] = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_a^b |f(x)|^2 dx < +\infty \right\}.$$

Definitsioon 1.2. (Hulk $L^1[a, b]$)

$$L^1[a, b] = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_a^b |f(x)| dx < +\infty \right\}.$$

Definitsioon 1.3. (Hulk l^2) Olgu antud jada $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Defineerime jadade hulga l^2

$$l^2 = \left\{ \{\xi_k\} \mid \sum_k |\xi_k|^2 < +\infty \right\}.$$

¹Integraali all mõeldakse siin Lebesgue integraali. Viimane võimaldab integreerida laiemat hulka funktsioone, kui Riemanni integraal. Lisaks loetakse kaks funktsiooni ekvivalentseks, kui nad erinevad hulgal, mille mõõt on 0.

1.2 Vektorruum

Lineaaralgebras käsitleti vektoreid ja vektorruume. Põhiliselt tehti seda läbi eukleidilise ruumi \mathbb{R}^n . Siin laiendame seda ideed.

Definitsioon 1.4. (*Vektorruum*) Hulk V on **vektorruum üle korpuse K** , kui seal on määratud elementide liitmine ja korpuse K elemendiga (skalaariga) korrutamine, mis rahuldavad tingimusi

$$\begin{aligned}a + b &= b + a, & \forall a, b \in V; \\(a + b) + c &= a + (b + c), & \forall a, b, c \in V;\end{aligned}$$

leidub element $0 \in V$, nii et

$$0 + a = a, \quad \forall a \in V,$$

iga elemendi $a \in V$ jaoks leidub vastandelement $-a \in V$, nii et

$$\begin{aligned}a + (-a) &= 0; \\1a &= a, & 1 \in K, \forall a \in V; \\ \lambda(\mu a) &= (\lambda\mu)a, & \forall a \in V, \forall \lambda, \mu \in K; \\(\lambda + \mu)a &= \lambda a + \mu a, & \forall a \in V, \forall \lambda, \mu \in K; \\ \lambda(a + b) &= \lambda a + \lambda b, & \forall a, b \in V, \forall \lambda \in K.\end{aligned}$$

Vektorruumi üle kompleksarvude korpuse \mathbb{C} nimetatakse kompleksseks vektorruumiks.

Teoreem 1.1. *Hulgal $L^2[a, b]$ on võimalik defineerida elementide liitmine ja skalaariga korrutamine selliselt, et on täidetud vektorruumi aksioomid. Olgu $f, g \in L^2[a, b]$ ja $c \in \mathbb{C}$, siis*

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x), \\(c \cdot f)(x) &= c \cdot f(x)\end{aligned}$$

iga $x \in [a, b]$ korral.

1.3 Normeeritud ruum

Definitsioon 1.5. (*Vektori norm*) Kompleksset vektorruumi V nimetatakse normeeritud ruumiks, kui igale elemendile $a \in V$ on vastavusse seatud reaalarv $\|a\|$, mis rahuldab tingimusi

$$\begin{aligned}\|a\| &\geq 0, & \forall a \in V \text{ ja } \|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0; \\ \|a + b\| &\leq \|a\| + \|b\|, & \forall a, b \in V; \\ \|\lambda a\| &= |\lambda| \|a\|, & \forall a \in V, \forall \lambda \in \mathbb{C}.\end{aligned}$$

Elemendi norm määrab nii öelda elemendi pikkuse. Lisaks on võimalik defineerida meetrika, s.t. olgu elementide $a, b \in V$ vaheline kaugus $\|a - b\|$. Siit on võimalik defineerida vektorruumi V elementide jada $\{a_n\}$ piirväärtus läbi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n - a\| = 0.$$

Teoreem 1.2. Vektorruum $L^2[a, b]$ on normeeritud ruum, kus norm on antud läbi

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}.$$

1.4 Skalaarkorrutisega vektorruum

Ruumis \mathbb{R}^n on olemas mõiste, mida nimetatakse skalaarkorrutiseks. Selle abil saab leida vektorite projektsioone ja vektorite vahelisi nurki.

Definitsioon 1.6. (Skalaarkorrutis) Kompleksel vektorruumil V on määratud skalaarkorrutis, kui selle ruumi igale kahele elemendile a ja b on vastavusse seatud mingi kompleksarv $\langle a, b \rangle$, mida nimetatakse nende elementide **skalaarkorrutiseks**, ja mis rahuldab tingimusi

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle &= \overline{\langle b, a \rangle}, & \forall a, b \in V; \\ \langle \lambda_1 a + \lambda_2 b, c \rangle &= \lambda_1 \langle a, c \rangle + \lambda_2 \langle b, c \rangle, & \forall a, b, c \in V, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}; \\ \langle a, a \rangle &\geq 0, & \forall a \in V \text{ ja } \langle a, a \rangle = 0 \Leftrightarrow a = 0. \end{aligned}$$

Teoreem 1.3. Vektorruumil $L^2[a, b]$ on võimalik defineerida skalaarkorrutis. Olgu $f, g \in L^2[a, b]$. Siis

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Siit on näha, et funktsiooni norm on $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$. Täpsemalt öeldes võib igas skalaarkorrutisega ruumis defineerida normi selliselt.

Nüüd saame leida kahe funktsiooni vahelise nurga, ühe funktsiooni projektsiooni teise peale ja ka otsustada, kas mingid funktsioonid on “risti”, s.t. on ortogonaalsed:

$$\begin{aligned} \cos \widehat{f, g} &= \frac{|\langle f, g \rangle|}{\|f\| \|g\|}, \\ f \perp g &\Leftrightarrow \langle f, g \rangle = 0. \end{aligned}$$

Näide 1.1. Olgu $f, g \in L^2[-1, 1]$ ja $f(x) = x$ ning $g(x) = 5x^3 - 3x$. Siis

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 x \cdot (5x^3 - 3x) dx = \int_{-1}^1 (5x^4 - 3x^2) dx = \left(x^5 - x^3 \right) \Big|_{-1}^1 = 0,$$

ehk need kaks funktsiooni on omavahel ortogonaalsed.

1.5 Hilberti ruum

Hilberti ruum on mõiste, mis jookseb läbi väga paljude matemaatiliste tehnikate. See on skalaarkorrutisega ruum, mis rahuldab teatud “häid” tingimusi.

Definitsioon 1.7. (Fundamentaaljada) Jada $\{a_n\}$ nimetatakse **fundamentaaljadaks**, kui suvalise $\varepsilon > 0$ korral leidub naturaalarv $n_0 \in \mathbb{N}$ nii, et iga $n, m > n_0$ puhul kehtib võrratus $\|a_n - a_m\| < \varepsilon$.

Definitsioon 1.8. (*Hilberti ruum*) Skalaarkorrutisega ruumi, kus iga fundamentaaljada koondub antud ruumi punktiks, nimetatakse **Hilberti ruumiks**.

Teoreem 1.4. *Ruum $L^2[a, b]$ on Hilberti ruum.*

1.6 Ruumi baas ja elementide koordinaadid

Definitsioon 1.9. (*Lineaarne sõltumatus*) Vektorruumi V elemente a_1, \dots, a_k nimetatakse **lineaarselt sõltumatuks**, kui võrdusest

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = 0$$

järeldub, et

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0.$$

Ehk elemendid on lineaarsed, kui ühtki neist ei saa tuletada teiste kaudu.

Näide 1.2. Ruumis $L^2[a, b]$ on iga elementide $1, x, x^2, \dots$ lõplik alamhulk lineaarselt sõltumatu.

Definitsioon 1.10. (*Ruumi dimensioon, lõpmatumõõtmelisus*) Ruumi V nimetatakse **n -dimensionaalseks**, kui seal on maksimaalselt n lineaarselt sõltumatut elementi. Ruumi nimetatakse **lõpmatumõõtmeliseks**, kui iga etteantud naturaalarvu $k \in \mathbb{N}$ korral on võimalik leida k lineaarselt sõltumatut elementi.

Näide 1.3. Näite 1.2 alusel on ruum $L^2[a, b]$ lõpmatumõõtmeline.

Definitsioon 1.11. (*Baas*) Olgu V n -dimensionaalne. Siis on võimalik leida n lineaarselt sõltumatut elementi, mida nimetatakse antud ruumi **baasiks**.

Ruumi V igat elemendi saab siis esitada tema mingi baasi lineaarse kombinatsioonina.

Teoreem 1.5. *Olgu vektorruum V n -dimensionaalne ja olgu antud mingi baas $\{e_1, \dots, e_n\}$. Siis ruumi V iga element a on esitatav kujul*

$$a = \sum_i \alpha_i e_i,$$

kus skalaarid α_k on antud elemendi a **koordinaadid** antud baasil.

Näide 1.4. Vektorruumis \mathbb{R}^3 on iga element $a = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ esitatav kui

$$a = \xi_1 \cdot (1, 0, 0) + \xi_2 \cdot (0, 1, 0) + \xi_3 \cdot (0, 0, 1).$$

Baas on siin $\{(1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1)\}$.

1.7 Ortonormaalised süsteemid Hilberti ruumis

Mis juhtub siis, kui tegu on lõpmatumõõtmelise ruumiga? Osutub, et iga (lõpmatu) lineaarselt sõltumatu hulk antud ruumi elementidest ei kõlba baasiks, vaja on lisatingimusi.

Definitsioon 1.12. (*Ortonormaalne süsteem*) Hilberti ruumi H loenduvat elementide hulka $\{e_k\}$ nimetatakse ortonormaalseks, kui

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{kui } i = j; \\ 0, & \text{kui } i \neq j. \end{cases}$$

Sellist hulka nimetatakse antud ruumi H **ortonormaalseks süsteemiks**.

Näide 1.5. Vektorruumis \mathbb{R}^3 on baas $\{(1;0;0), (0;1;0), (0;0;1)\}$ ortonormaalne.

Definitsioon 1.13. (*Ortonormaalne süsteemi täielikkus*) Hilberti ruumi H ortonormaalne süsteem $\{e_k\}$ on **täielik**, kui iga $f \in H$ korral

$$f \perp \{e_k\} \Leftrightarrow f = 0.$$

Täielikku ortonormaalset süsteemi nimetatakse ka antud ruumi **ortonormaalseks baasiks**.

Teoreem 1.6. Olgu $\{e_k\}$ täielik ortonormaalne süsteem. Siis iga element $f \in H$ on esitatav läbi lõpmatu summa

$$f = \sum_k c_k e_k = \sum_k \langle f, e_k \rangle e_k,$$

kus konstante $c_i = \langle f, e_i \rangle$ nimetatakse elemendi f Fourier' kordajateks ortonormaalne süsteemi $\{e_k\}$ järgi.

Näide 1.6. Ruumis $L^2[-1, 1]$ moodustavad Legendre polünoomid

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{3x^2 - 1}{2}, \\ &\dots \end{aligned}$$

täieliku ortogonaalse süsteemi. Need on saadud näites 1.2 toodud polünoomide teisen-
damisel. Ortonormaalset süsteemist erinevad Legendre'i polünoomid ainult konstandi
võrra: $e_i = P_i / \|P_i\|$. Seega iga funktsioon $f \in L^2[-1, 1]$ on esitatav läbi summa

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\|P_i\|^2} \langle f, P_i \rangle P_i. \quad (1.1)$$

Näide 1.7. Olgu antud kaks funktsiooni $f, g \in L^2[a, b]$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1, \\ g(x) &= \begin{cases} f(x), & \text{kui } x \in [a, b] \setminus \{a + \frac{b-a}{2}, a + \frac{b-a}{4}, a + \frac{b-a}{8}, \dots\}; \\ 0, & \text{kui } x \in \{a + \frac{b-a}{2}, a + \frac{b-a}{4}, a + \frac{b-a}{8}, \dots\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Antud funktsioonide puhul

$$\|f - g\| = 0$$

ehk ruumi $L^2[a, b]$ normi mõttes on nad samad. Sama moodi võivad teoreemis 1.6
antud funktsioonid f ja $\sum_k c_k e_k$ erineda loendavas arvus punktides. Täpsemalt öeldes
nad võivad erineda hulgal, mille mõõt on 0.

1.8 Rakendusi

Me oleme jõudnud arusaamisele, et funktsioone on võimalik esitada lineaarse kombinatsioonina antud ruumi täieliku ortonormaalse süsteemi elementidest. Ja meil on lihtne eeskiri, kuidas antud lineaarse kombinatsiooni kordajaid leida. Siin vaatame paari rakendust, mis seda saavutust ära kasutavad.

Teoreem 1.7. *Olgu Hilberti ruumis H antud täielik ortonormaalne süsteem $\{e_1, e_2, \dots\}$. Siis iga $f \in H$ ja $k > 1$ korral*

$$\left\| \sum_{i=1}^{k+1} \langle f, e_i \rangle e_i - f \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^k \langle f, e_i \rangle e_i - f \right\|.$$

Seega lineaarsesse kombinatsiooni elemente juurde lisades liigub summa aina lähemale (täpsemalt öeldes ei liigu kaugemale) antud funktsioonist f^2 .

Teoreem 1.8. *Olgu Hilberti ruumis H antud lõplik ortonormaalne hulk $\{e_1, \dots, e_n\}$. Siis nende elementide lineaarne kate $X_n = \{f \mid f = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k, \lambda_k \in \mathbb{C}\}$ on alamruum ruumis H ($X_n \subset H$). Olgu $f \in H$. Siis kehtib*

$$\left\| \sum_{i=1}^k \langle f, e_i \rangle e_i - f \right\| \leq \|g - f\|, \quad \forall g \in X_n.$$

Ehk alamruumis X_n ei leidu teist elementi, mis oleks ligemal funktsioonile f kui antud summaga saadud element. Seega meie eeskiri funktsiooni summana aproksimeerimiseks annab parima võimaliku tulemuse antud alamruumis X_n .

Näide 1.8. Olgu antud mingi keeruline funktsioon, mida on tülikas analüütiliselt käsitleda. Antud juhul võib olla kasulik asendada ta mingi teise funktsiooniga, mis on kujult sarnane aga lihtsam töödelda. Või on antud funktsioon numbriliselt ja me tahame saada sarnase kujuga funktsiooni analüütiliseks töötlemiseks. Näiteks võib ta asendada mingi m esimese Legendre polünoomi lineaarse kombinatsiooniga (valem (1.1)).

Näide 1.9. Tihti on võimalik saada väga hea funktsiooni lähendus juba mingi lõpliku arvu m elemendiga. Valiku võib teha ka selliselt, et valitakse elemendid, mille panus funktsiooni on kõige suurem (need, millel on summa kõige suuremad Fourier' kordajad), ehk siis vaadatakse $\langle f, e_i \rangle$ väärtusi ja võetakse kõige suuremad. Informatiooni hulk nende elementide koefitsientide jaoks võib olla palju väiksem funktsiooni enda kirjeldusest. Seega on siin võimalus andmete pakkimiseks. Seda ideed kasutatakse piltide ja video digitaalseks pakkimiseks. Loomulikult sõltub pakkimine valitud baasist ja andmete iseloomust. Baaside leidmine, mis pilte hästi pakivad ja samas mille kasutamine ei ole arvutusmahukas, on kindlasti üks suuri probleeme.

Näide 1.10. Diferentsiaalvõrrandite $Du = f$ numbrilisel lahendamisel asendatakse otsitav suurus u summaga

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^n c_i e_i$$

²On võimalik leida "halbu" funktsioone, mis antud baasiga koonduvad väga aeglaselt. Samas rakendustes nendega tavaliselt kokku ei puututa.

ja moodustatakse süsteem

$$\begin{cases} \langle D\tilde{u}, e_1 \rangle = \langle f, e_1 \rangle, \\ \dots \\ \langle D\tilde{u}, e_n \rangle = \langle f, e_n \rangle; \end{cases}$$

koeffitsientide c_k leidmiseks. Võtmesõnad: variatsioonmeetod, Ritz'i meetod, Galerkini meetod.

Näide 1.11. Summas

$$f = \sum_i c_i e_i$$

võib konstante c_i vaadata kui kaale, mis iseloomustavad baasidelemendi e_i panust/olulisust/sobivust/jne. antud funktsiooniga. Valides/konstrueerides spetsiifilisi baase on võimalik nii signaale, andmeid, jne. analüüsida. Lisaks peale kaalude saamist on võimalik neid muuta, nii vähendades või suurendades vajalikke omadusi antud funktsioonis.

2 Fourier' teisendus

2.1 Fourier' rida

Teoreem 2.1. Ruumis $L^2[-\pi, \pi]$ moodustavad funktsioonid

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos t, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin t, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2t, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2t, \dots \right\}$$

täieliku ortonormalse süsteemi.

Iga funktsioon $f \in L^2[-\pi, \pi]$ on seega esitatav reana

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \langle f, 1 \rangle + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \cos kt \rangle \cos kt + \langle f, \sin kt \rangle \sin kt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) ds + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos(ks) ds \cdot \cos kt + \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin(ks) dt \cdot \sin kt \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kt + B_k \sin kt, \end{aligned} \quad (2.1)$$

kus siis

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos(ks) ds, \\ B_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin(ks) ds. \end{aligned}$$

Kuna antud funktsioonid on perioodilised, siis saab funktsiooni f laiendada kogu reaalarvude hulgale defineerides $f(t+2\pi) = f(t)$. Või vastupidi, mingit reaalarvude hulgal perioodilist funktsiooni saab reaks lahutada kasutades antud ortonormaalset süsteemi.

Antud süsteemi võib laiendada ka funktsioonidele, mis on perioodiga T , s.t. $f \in L^2[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Siis kasutades sagedust $\nu_0 = 1/T$, saame

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k2\pi\nu_0 t + B_k \sin k2\pi\nu_0 t,$$

kus siis

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(s) \cos(k2\pi v_0 s) ds,$$
$$B_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(s) \sin(k2\pi v_0 s) ds.$$

Tehes asenduse $A_k = R_k \cos \phi_k$ ja $B_k = R_k \sin \phi_k$, saame

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} R_k \cos(k2\pi v_0 t + \phi_k).$$

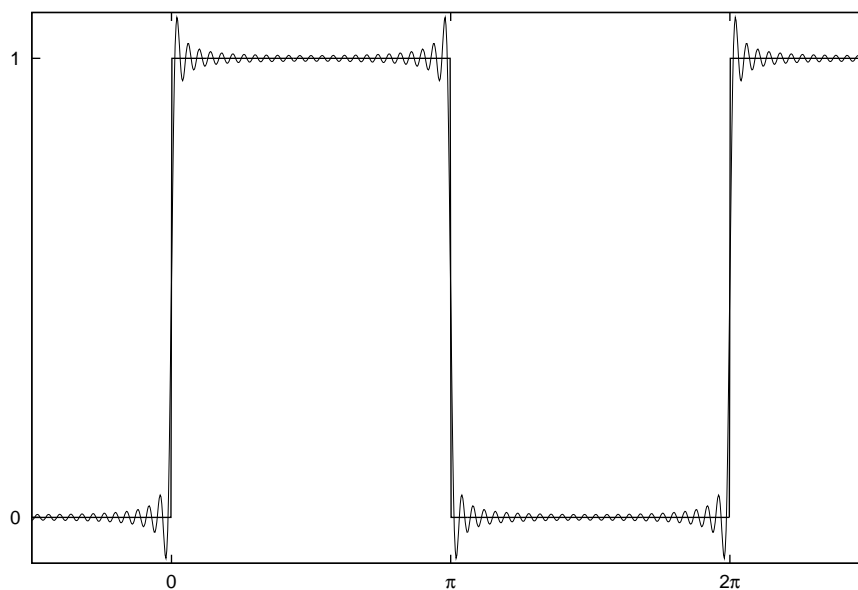
Siin on signaal $f(t)$ jagatud nn. harmoonikuteks k sagedusega $v_k = kv_0$, kus $v_0 = 1/T$. Tullles tagasi rakenduste juurde, saame antud suurusi R_k ja ϕ_k interpreteerida kui mingi signaali harmooniku amplituudi ($|R_k|^2$ on antud harmooniku võimsus) ja faasinihet.

Näide 2.1. Looduses on väga paljud nähtused seotud võnkumiste ja lainetega ja selline baas sobib väga hästi nende analüüsimiseks.

Näide 2.2. Antud baasi kasutatakse heli ja piltide pakkimiseks. Näiteks vanem JPEG failiformaat kasutab pakkimiseks trigonomeetrilist baasi. JPEG2000 standard kasutab lainikuid.

Näide 2.3. Muusikasüsteemis ei pruugi mingi kõlar erinevaid sagedusi sarnaselt esitada (põhjuseks võimsuse kadu teatud sagedustel) - selle vastu saab kompenseerida lahutades signaali komponentideks, suurendades probleemsete sageduste amplituudi ja teisendades koefitsendid tagasi uueks signaaliks, mis siis saadetakse kõlarisse. Selle asja nimi on ekvalaiser.

Näide 2.4. Vaatame järgmist blokk-signaali ja tema aproksimatsiooni läbi $n = 50$ esimese Fourier' komponendi:



Nagu näha, on aproksimatsiooni väga sarnane. Samas punktide ligidal, kus toimub väga kiire muutus, näeb aproksimatsioon väga laineline välja. Saab näidata, et antud lained jäävad alles isegi piiril $n \rightarrow \infty$ omades mingit lõplikku kõrgust, samas nende pindala on samal piiril null. Antud nähtust kutsutakse ka Gibbsi fenomeniks.

Trigonomeetriline baas on esitatav ka komplekskujul

$$\left\{ \sqrt{\nu_0} e^{ik2\pi\nu_0 t} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

Siis

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik2\pi\nu_0 t}, \quad (2.2)$$

kus

$$c_k = \nu_0 \int_{-1/2\nu_0}^{1/2\nu_0} f(t) e^{-ik2\pi\nu_0 t} dt.$$

2.2 Fourier' teisendus

Vaatame funktsioone, mis on määratud üle kogu reaalarvude hulga.

Definitsioon 2.1. (Hulk $L^2(\mathbb{R})$) Defineerime reaalarvude hulgal määratud kompleksarvuliste integreeruva ruuduga funktsioonide hulga:

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < +\infty \right\}.$$

Hulk $L^2(\mathbb{R})$ on Hilberti ruum, s.t. seal on defineeritud skalaarkorrutis.

Definitsioon 2.2. (Hulk $L^1(\mathbb{R})$) Defineerime reaalarvude hulgal määratud kompleksarvuliste absoluutselt integreeruvate funktsioonide hulga:

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < +\infty \right\}.$$

Proovime laiendada Fourier' rida mitteperioodilisele lõpmatu signaalile, s.t. olgu $T \rightarrow \infty$ ehk $\nu_0 \rightarrow 0$. Defineerime

$$\hat{f}_{\nu_0}(\nu) = \int_{-1/2\nu_0}^{1/2\nu_0} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt$$

ja edasi teisendame

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\nu_0 \int_{-1/2\nu_0}^{1/2\nu_0} f(t) e^{-ik2\pi\nu_0 t} dt \right) e^{ik2\pi\nu_0 t} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_{\nu_0}(k\nu_0) e^{i2\pi k\nu_0 t} \nu_0 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_{\nu_0}(k\nu_0) e^{i2\pi k\nu_0 t} ((k+1)\nu_0 - k\nu_0) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_{\nu_0}(\nu_k) e^{i2\pi\nu_k t} (\nu_{k+1} - \nu_k), \quad \text{kus } \nu_k = k\nu_0. \end{aligned}$$

Seda saab vaadata kui Riemanni summat ja piiril $v_0 \rightarrow 0$ saame

$$\hat{f}(v) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i2\pi vt} dt,$$

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(v) e^{i2\pi vt} dv.$$

Osutub, et iga $f \in L^2(\mathbb{R})$ puhul nii antud integraalid ei koonu. Veel võib märkida, et funktsioon $e^{i2\pi vt} \notin L^2(\mathbb{R})$ ehk tegu ei ole ruumi $L^2(\mathbb{R})$ baasiga. Defineerime Fourier operaatorid:

Definitsioon 2.3. Operaator $\hat{\cdot}: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ on Fourier' teisendus ja rakendub tavaliselt reeglina

$$\hat{f}(v) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i2\pi vt} dt.$$

Operaator $\check{\cdot}: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ on Fourier' pöördteisendus ja rakendub tavaliselt reeglina

$$\check{g}(t) = \int_{\mathbb{R}} g(v) e^{i2\pi vt} dv.$$

Määrang "tavaliselt" antud definitsioonis käsitleb "häid" funktsioone, mille puhul antud integraalid koonduvad. "Halva" funktsiooni f korral on võimalik ruumis $L^2(\mathbb{R})$ leida "heade" funktsioonide jada $\{f_n\}$, nii et $f_n \rightarrow f$ ja integraal \hat{f}_n koondub. Sellisel juhul defineeritakse

$$\hat{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n.$$

Teoreem 2.2. Operaator $\check{\cdot}$ on operaatori $\hat{\cdot}$ pöördoperaator. Kehtib

$$(\hat{f})^\check{=} f.$$

Viimases võrduses antud funktsioonid võivad siiski erineda hulgal mõõduga 0, s.t. nad on võrdsed peaaegu kõikjal. Võrdusmärk on pandud $L^2(\mathbb{R})$ normi alusel.

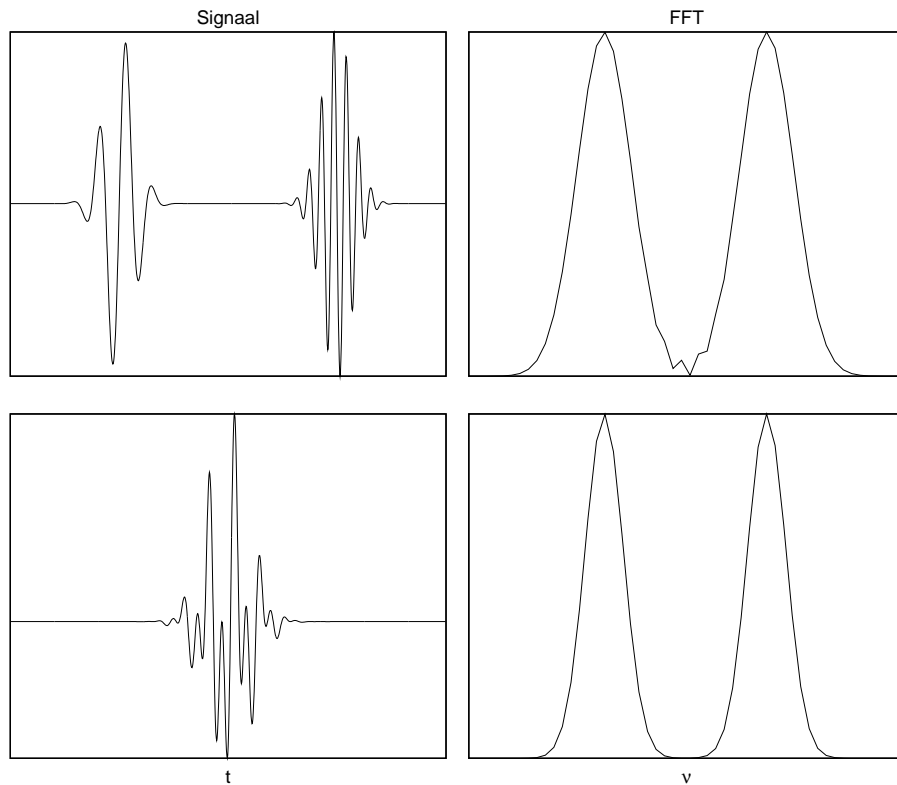
2.3 Fourier spekter, aknaga Fourier spekter

Valemis

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(v) e^{i2\pi vt} dv$$

võib Fourier' teisendust $\hat{f}(v)$ vaadata kui signaalis $f(t)$ esineva sageduse v kaalu. Funktsioon $\hat{f}(v)$ on tavaliselt kompleksne ja rakendustes vaadatakse tihti võimsusspektrit $|\hat{f}(v)|^2$.

Näide 2.5. Võrdleme kahe signaali Fourier' võimsusspektrit (joonis 1). Mõlemad spektrid iseloomustavad signaali põhisagedusi. Samas nad ei anna infot, kus antud sagedusega osad asuvad.



Joonis 1: Kahe signaali Fourier' võimsusspekter. Ülemine on $\sin 5x \cdot e^{-x^2} + \cos 11x \cdot e^{-(x-10)^2}$, alumine $(\sin 5x + \sin 11x) \cdot e^{-(x-5)^2/2}$.

Paljudes rakendustes on vaja uurida andmete sagedusi erinevatel ajahetkedel. Selleks saab kasutada aknaga Fourier teisendust. Defineerime funktsiooni $w(t)$, mis rahuldab tingimust

$$\int_{\mathbb{R}} |w(t)|^2 dt = 1.$$

Selleks võib näiteks võtta

$$w(t) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}},$$

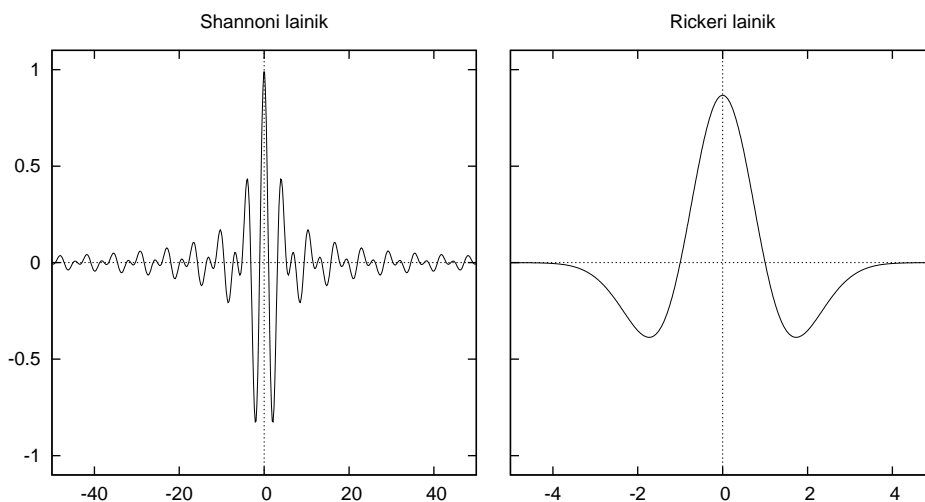
kus \mathcal{N} on normeerimiskonstant. Siis defineerime aknaga Fourier teisenduse läbi

$$\hat{f}(v, \tau) = \int_{\mathbb{R}} f(t) w(t - \tau) e^{-i2\pi vt} dt.$$

Antud teisendus leiab Fourier spektri $t = \tau$ ümbruses läbi akna w . On võimalik ka pöördteisendus

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(v, \tau) w(t - \tau) e^{i2\pi v t} dv d\tau.$$

Antud teisenduse nõrk külge on, et akna laius on fikseeritud. Seetõttu saab temaga isoleerida ainult fikseeritud suurusega löike.



Joonis 2: Pidevate lainikute näited.

3 Lainikud

3.1 Pidev lainikteisendus

Vaatame funktsiooni $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Antud funktsiooni võime skaleerida läbi

$$\psi_\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \psi\left(\frac{x}{\lambda}\right), \quad \lambda \in \mathbb{R} \wedge \lambda > 0.$$

$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ valem ees tagab, et $\|\psi_\lambda\| = \|\psi\| = \text{const}$. Lisaks võime funktsiooni ka nihutada ehk transleerida:

$$\psi_{\lambda\tau} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \psi\left(\frac{x-\tau}{\lambda}\right).$$

Funktsiooni ψ nimetatakse **lainikuks** või ka **emalainikuks**. Funktsioonid $\psi_{\lambda\tau}$ on siis **tütarlainikud**, ema koopiad, mis on transleeritud ja skaleeritud antud suurusele λ .

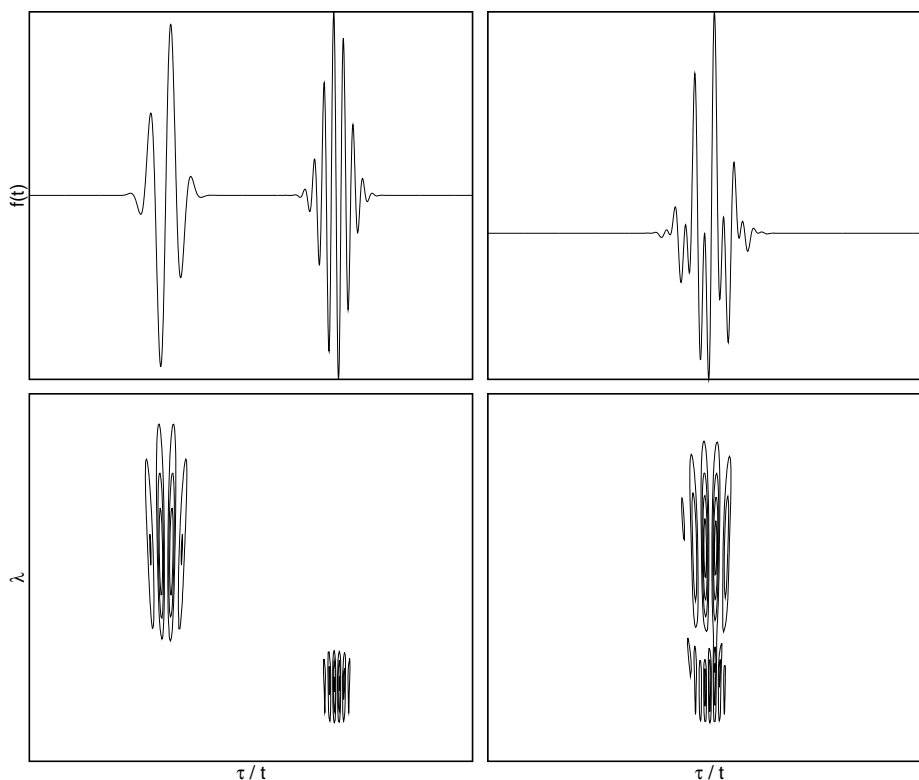
Olgu uuritav funktsioon $f \in L^2(\mathbb{R})$. Siis skalaarkorrutis $\langle f, \psi_{\lambda\tau} \rangle$ iseloomustab funktsiooni $\psi_{\lambda\tau}$ panust uuritavasse funktsiooni. Meenutame, et funktsioonid on risti, kui skalaarkorrutis on 0. Defineerime funktsiooni

$$g(\lambda, \tau) = \langle f, \psi_{\lambda\tau} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_{\lambda\tau}(t)} dt.$$

Seda nimetatakse funktsiooni f **pidevaks lainikteisenduseks** lainiku ψ järgi. Mõistlike lainikute saamiseks kasutatakse ka lisatingimusi, mis teevad võimalikuks pöördteisenduse:

Teoreem 3.1. Rahuldagu $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ tingimust

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|v|} |\hat{\psi}(v)|^2 dv < \infty. \quad (3.1)$$



Joonis 3: Pideva lainikteisenduse (CWT) näide (*scalogram*). Signaalid on samad, mis näites 1. Lainikuks on Shannoni lainik. Kujutatud on $|\langle f, \psi_{\lambda\tau} \rangle|^2$ kontuurjooned. CWT verikaaltelg on λ (mastaap ehk suurus) ja horisontaaltelg on τ (translatsioon ehk asukoht). Mastaapi ja sagedust on võimalik seostada läbi $\nu \sim 1/\lambda$.

Siis iga $f \in L^2(\mathbb{R})$ korral

$$f(t) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \langle f, \psi_{\lambda\tau} \rangle \psi_{\lambda\tau}(t) d\tau \frac{d\lambda}{\lambda^2}.$$

Antud käsitluses on sarnasus Fourier' teisendusega. Kui Fourier' teisendus määrab mingi sageduse kaalu uuritavas funktsioonis, siis lainikteisendus $g(\lambda, \tau)$ iseloomustab lainiku resoneerimist signaaliga antud suurusel λ ja asukohal τ .

Näited lainikutest, mida kasutatakse pidevaks lainikteisenduseks, saab näha joonisel 2.

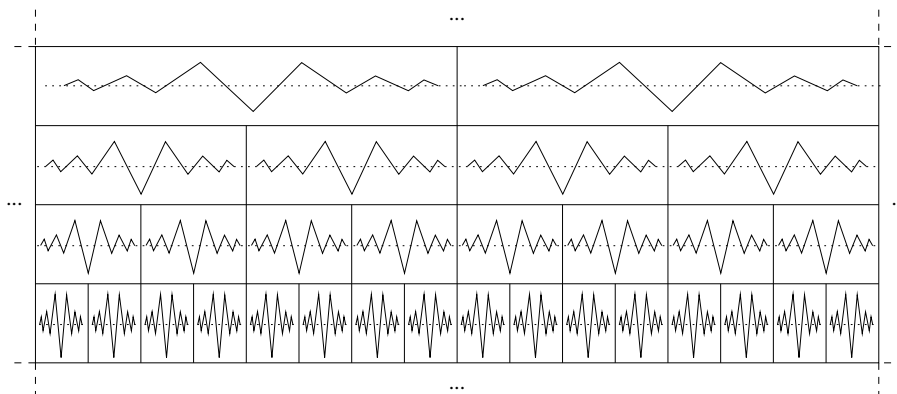
Näide 3.1. Pideva lainikteisenduse rakendust saab näha joonisel 3.

3.2 Lainikud kompaktsel kandjaga

Definitsioon 3.1. (*Funktsiooni kandja*) Olgu antud funktsioon $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Vaatame hulka

$$\{t \in \mathbb{R} \mid \psi(t) \neq 0\}.$$

See on punktide hulk, kus funktsioon ei ole null. **Funktsiooni kandja** on selle hulga sulund ja tähistatakse $\text{supp}(f)$.



Joonis 4: Lainikute süsteem jagab ruumi kahe kaupa osadeks, kus iga süsteemi komponent on lokaliseeritud mingis piirkonnas. Lainikud ei pruugi oma kastiga piiratud olla, s.t. võib olla teatud osas ülekattuvust. Siiski vaatame kompaktsed kandjaga lainikuid.

Kui tegu on kompaktsed kandjaga, siis on see hulk tõkestatud, s.t. leidub mingi $a, b \in \mathbb{R}$, nii et $\text{supp}(\psi) \subset [a, b]$. Ehk siis funktsiooni väärtus väljaspool seda lõiku on 0.

Arvutuste seisukohalt on kasulik valida lainikuteks funktsioone kompaktsed kandjaga. Sellisel juhul $\langle f, \psi_{\lambda\tau} \rangle$ arvutamisel ei pea integraali võtma üle kogu reaalarvude hulga.

3.3 Lainikute süsteemid

Analüütiliselt on pidevat lainikeisendust mugav kasutada, samas mõõtetulemused/andmed on reeglina diskreetsed. Lisaks on pidevat lainikeisendust keeruline arvutada.

Olgu antud kompaktsed kandjaga emalainik ψ . Vaatame lainikuid pikkustel $\lambda_j = 2^{-j}$, mis on transleeritud mingi $k\lambda_j$ võrra. Siis saame

$$\Psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k) \quad (j, k \in \mathbb{Z}).$$

Karikatuurselt on sellised lainikud kujutatud joonisel 4. Otsime lainikuid, mis moodustavad ruumis $L^2(\mathbb{R})$ täieliku ortonormaalse süsteemi. Sellisel juhul

$$\langle \Psi_{j,k}, \Psi_{l,m} \rangle = \begin{cases} 1, & \text{kui } j = l \text{ ja } k = m; \\ 0, & \text{kui } j \neq l \text{ või } k \neq m \end{cases}$$

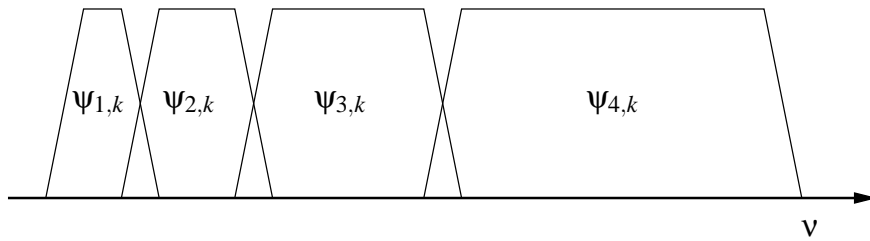
ja

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \Psi_{j,k} = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \Psi_{j,k} \rangle \Psi_{j,k}.$$

Definitsioon 3.2. (Lainikute süsteem) **Lainikute süsteem** ruumis $L^2(\mathbb{R})$ on ruumi $L^2(\mathbb{R})$ täielik ortonormaalne süsteem kujul

$$\{\Psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}},$$

kus emalainikuks on funktsioon $\psi \in L^2(\mathbb{R})$.



Joonis 5: Lainikute süsteemid erinevatel mastaapidel katavad spektri. Antud pilt on ideaal.

Esimene küsimus oleks kohe, et kas selliseid süsteeme üldse eksisteerib?

Näide 3.2. Vaatame Haari lainikut:

$$\psi(t) = \begin{cases} -1, & \text{kui } 0 \leq t < 1/2; \\ 1, & \text{kui } 1/2 \leq t < 1; \\ 0, & \text{muudel juhtudel.} \end{cases}$$

Antud funktsiooniga saab moodustada lainikute süsteemi. Haari süsteem on tõesti väga hästi lokaliseeritud, samas tal on ka suur puudus — ta ei ole pidev.

Fourier teisendusest võib näha, et $(f(x/a))^\wedge = |a| \hat{f}(av)$. Seega lainikute süsteemid $\{\Psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}, j = \text{const}}$ jagavad funktsiooni spektri osadeks (joonis 5). Seega võib antud süsteemi rakendatuna mingile signaalile vaadata kui ribapääsfiltrit.

3.4 Lainiku konstrueerimine multiresolutsioonanalüüsist

Osutub, et lainikuid saab konstrueerida võttes aluseks multiresolutsioonanalüüsi.

Definitsioon 3.3. (Multiresolutsioonanalüüs, mastaabifunktsioon) **Multiresolutsioonanalüüs** koosneb alamruumide V_k jadast $\{V_k\}$, kus

$$\{0\} \subset \dots \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R})$$

ja **mastaabifunktsioonist** $\varphi(t) \in L^2(\mathbb{R})$, läbi mille saab iga alamruumi V_j jaoks koostada täieliku ortonormeeritud süsteemi

$$\{\varphi_{j,k}\},$$

kus

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k) \quad (j, k \in \mathbb{Z})$$

ja $\bigcup V_j$ on kõikjal tihe ruumis $L^2(\mathbb{R})$.

Kõikjal tiheduse nõue on siin selleks, et iga $f \in L^2(\mathbb{R})$ jaoks (mis ei pruugi olla hulgas $\bigcup V_j$), leidub selline jada $\{f_n\}$ (kus $f_n \in \bigcup V_j$), nii et $f_n \rightarrow f$.

Kuna $V_0 \subset V_1$, siis on iga $f \in V_0$ esitatav summana läbi V_1 baasielementide $\{\varphi_{1,k}\}$. Kuna $\varphi_{0,0} = \varphi \in V_0$, siis

$$\varphi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) \varphi_{1,k}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) \sqrt{2} \varphi(2t - k),$$

kus $u(k)$ on mingi kompleksarvuline jada. Seda jada nimetatakse **mastaabijadaks**.

Definitsioon 3.4. (*Ortogonaalne otsesumma*) Olgu U ja V Hilberti ruumi H alamruumid ja $U \perp V$ (s.t. iga $u \in U$ ja $v \in V$ korral $u \perp v$). Defineerime

$$U \oplus V = \{u + v : u \in U, v \in V\}.$$

Me nimetame hulka $U \oplus V$ hulkade U ja V **ortogonaalseks otsesummaks** ja kirjutades $U \oplus V$ eeldame, et $U \perp V$. Kui $H = U \oplus V$, siis iga $f \in H$ on esitatav läbi mingite $u \in U$ ja $v \in V$ kui $f = u + v$.

Teoreem 3.2. *Olgu antud multiresolutsioonanalüüs $\{V_j\}$ koos mastaabifunktsiooni φ ja mastaabijada $u(k)$ -ga. Moodustame jada $\{v(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ reegli*

$$v(k) = (-1)^{k-1} \overline{u(1-k)}$$

ja defineerime funktsioonid

$$\psi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(k) \varphi_{1,k}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(k) \sqrt{2} \varphi(2t - k)$$

ja

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k) \quad (j, k \in \mathbb{Z}).$$

Siis $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ on täielik ortonormaalne süsteem ruumis $L^2(\mathbb{R})$ ja moodustades alamruumi

$$W_j = \left\{ \sum_k \xi_k \psi_{j,k} \mid \{\xi_k\} \in l^2 \right\},$$

saame

$$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}.$$

Seega ruum W_{j-1} on nii öelda “detail”, mis tuleb lisada ruumi V_{j-1} , et saada ruum V_j . Kui on antud multiresolutsioonanalüüs koos mastaabifunktsiooniga φ (mida kutsutakse **isalainikuks**) ja mastaabijada $u(k)$, saab sellest tuletada **emalainiku** ψ ja sellest edasi **tütarlainikud** $\psi_{j,k}$, mis moodustavad ruumis $L^2(\mathbb{R})$ lainikute süsteemi.

3.5 Multiresolutsioonanalüüsi koostamine

Et saada lainikut, on meil vaja multiresolutsioonanalüüsi mastaabifunktsiooni φ ja mastaabijada $\{u(k)\}$. Kuidas koostada antud süsteeme?

Rakendadest Fourier’ teisendust mastaabifunktsioonile φ , saame

$$\hat{\varphi}(v) = m_0\left(\frac{v}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{v}{2}\right),$$

kus

$$m_0(v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) e^{-i2\pi vk}.$$

Teisendust $\hat{\varphi}$ saab rekursiivselt arendada:

$$\hat{\varphi}(v) = m_0\left(\frac{v}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{v}{2}\right) = m_0\left(\frac{v}{2}\right) m_0\left(\frac{v}{4}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{v}{4}\right) = \dots = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(v/2^j),$$

kui valime φ nii, et

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \hat{\varphi}(v/2^j) = \hat{\varphi}(0) = 1.$$

Teoreem 3.3. *Olgu antud jada $\{u(k)\}$ ja funktsioon*

$$m_0(v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k u(k) e^{-i2\pi vk}.$$

Kui on rahuldatud tingimused

1. $\sum_k u(k) = \sqrt{2}$,
2. $\sum_k u(k) \overline{u(k+2l)} = \delta_{0,l} \quad \forall l \in \mathbb{Z}$,
3. $\sum_k |k|^\varepsilon |u(k)| < +\infty$ mingi $\varepsilon > 0$ jaoks,
4. $\inf_{|2\pi v| < \pi/2} |m_0(v)| > 0$,

*siis on antud multiresolutsioonanalüüs mastaabifunktsiooniga $\varphi = (\hat{\varphi})^\vee$ ja mastaabi-
jadaga $u(k)$ ning $\hat{\varphi}$ on antud läbi*

$$\hat{\varphi}(v) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(v/2^j).$$

Meid huvitavad võimalikult lihtsad funktsioonid, seega võime nõuda, et nullist oleksid erinevad ainult $u(1), \dots, u(n)$. On võimalik näidata, et kui jadas $\{u(k)\}$ on lõplik arv nullist erinevaid elemente, siis saadakse lainik kompakitse kandjaga.

Eelmise teoreemi punktid 1 ja 2 annavad $1 + n/2$ seost koefitsentide $u(k)$ vahel. Valime

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k^l u(k) = 0,$$

kus $l = 0, \dots, n/2 - 1$. Antud valik tekitab lainikud, mille esimesed $n/2$ momenti on nullid. Siit saame veel $n/2$ seost. Kokku on meil n sõltumatut võrdust ja võime võtta lahendiks

$$\begin{aligned} u(1) &= \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}; & u(2) &= \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}; \\ u(3) &= \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}; & u(4) &= \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Antud lainikut nimetatakse Daubechies 4 lainikuks. Antud viisil tuletatud lainikute kuju saab näha joonisel 6.

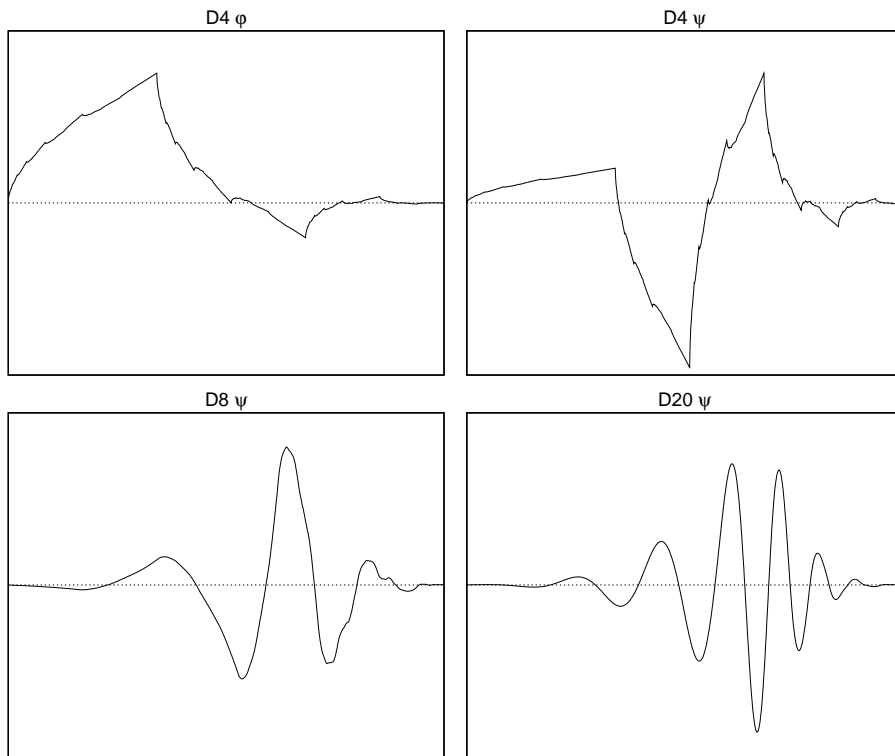
3.6 Rekurrentne baaside definitsioon

Mastaabifunktsioon on antud läbi

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k).$$

Lisaks kuna $V_0 \subset V_1$, saame

$$\varphi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) \varphi_{1,k}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) \sqrt{2} \varphi(2t - k).$$



Joonis 6: Daubechies lainikud, nimetatud Ingrid Daubechies järgi.

Siis

$$\begin{aligned}
 \varphi_{j,k}(t) &= 2^{j/2} \varphi(2^j t - k) \\
 &= 2^{j/2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} u(m) \sqrt{2} \varphi(2(2^j t - k) - m) \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} u(m) 2^{(j+1)/2} \varphi(2^{j+1} t - 2k - m) \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} u(m) \varphi_{j+1, 2k+m}(t).
 \end{aligned}$$

Sarnaselt $\psi_{j,k}$ jaoks saame valemid

$$\begin{aligned}
 \varphi_{j,k}(t) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} u(m) \varphi_{j+1, 2k+m}(t), \\
 \psi_{j,k}(t) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} v(m) \varphi_{j+1, 2k+m}(t).
 \end{aligned}$$

3.7 Dekompositsioon

Otsime viisi, kuidas leida summa

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \psi_{j,k}$$

koefitsendid $c_{j,k}$.

Olgu antud funktsioon $f \in L^2(\mathbb{R})$. Siis antud funktsiooni projektsioon multiresoltsioonanalüüsi alamruumi V_j on

$$f_j = \sum_k y_j(k) \varphi_{j,k},$$

kus

$$y_j(k) = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle = \langle f_j, \varphi_{j,k} \rangle.$$

Kuna $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ ja $V_j \perp W_j$, siis $V_j \oplus W_j$ baas on $\{\varphi_{j,k}\} \cup \{\psi_{j,k}\}$ ja

$$f_{j+1} = \sum_k \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k} + \sum_k \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} = f_j + d_j,$$

kus $d_j \in W_j$ on detail, mis tuleb lisada eelmisele f aproksimatsioonile f_j , et saada f_{j+1} .

Seega

$$\begin{aligned} y_j(k) &= \langle f_{j+1}, \varphi_{j,k} \rangle \\ &= \left\langle \sum_l y_{j+1}(l) \varphi_{j+1,l}(t), \sum_{m \in \mathbb{Z}} u(m) \varphi_{j+1,2k+m}(t) \right\rangle \\ &= \sum_{l,m} y_{j+1}(l) u(m) \langle \varphi_{j+1,l}, \varphi_{j+1,2k+m} \rangle \\ &= \sum_{l,m} y_{j+1}(l) u(m) \delta_{l,2k+m} \\ &= \sum_l u(l-2k) y_{j+1}(l). \end{aligned}$$

Seega f_j koordinaadid ruumis V_j avalduvad läbi tema koordinaatide ruumis V_{j+1} :

$$y_j(k) = \sum_l u(l-2k) y_{j+1}(l).$$

Sarnaselt tehes lahti

$$d_j = \sum_k x_j(k) \psi_{j,k},$$

saame

$$x_j(k) = \sum_l v(l-2k) y_{j+1}(l).$$

Tuletame meelde, et $x_j(k)$ on siin funktsiooni f koordinaadid baasil $\{\psi_{j,k}\}$ — täpselt see mida otsime. Kuna

$$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1} = (V_{j-2} \oplus W_{j-2}) \oplus W_{j-1} = \dots = V_{j-m} \oplus W_{j-m} \oplus W_{j-m+1} \oplus \dots \oplus W_{j-1},$$

siis

$$f_j = f_{j-1} + d_{j-1} = f_{j-2} + d_{j-2} + d_{j-1} = \dots = f_{j-m} + d_{j-m+1} + \dots + d_{j-1}.$$

Siit saame

$$f_j = \sum_k y_{j-m}(k) \varphi_{j-m,k} + \sum_{l=j-m}^{j-1} \sum_k x_l(k) \psi_{l,k}. \quad (3.2)$$

Esimene komponent iseloomustab ülejääki kõige suuremasse mastaapi. Kui j on suur, peaks f_j olema hea aproksimatsioon funktsioonile f . Kui tegu on kompaktsel kandjaga lainikuga ja nullist erinevaid $y_j(k)$ on lõplik arv, siis iga dekompositsiooniga nende arv kahaneb poole võrra.

Teine viis seda summat vaadata on läbi spektri. Nagu enne nägime, katavad $\psi_{j-m\dots j-1,k}$ mingi spektrivahemiku. Kui see langeb kokku funktsiooni spektriga, olemegi saanud hea hinnangu funktsioonile.

Üks detail antud käsitluses on siiski jäänud kahe silma vahele. Antud tuletuses on meil vaja kõige detailsema taseme kordajaid $y_j(k) = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle$. Kust neid saada?

Teoreem 3.4. *Olgu $f \in L^2(\mathbb{R})$ selline, et mingi $\varepsilon \in (0, 1]$ jaoks leidub konstant $C_1 < \infty$, nii et iga $s, t \in \mathbb{R}$ korral*

$$|f(s) - f(t)| \leq C_1 |s - t|^\varepsilon. \quad (3.3)$$

Olgu $\varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, mis rahuldab (on normeeritud)

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt = 1$$

ja

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^\varepsilon |\varphi(x)| dx = C_2 < \infty. \quad (3.4)$$

Siis

$$\left| 2^{j/2} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle - f(2^{-j}k) \right| \leq C_1 C_2 2^{-j\varepsilon}.$$

Siin on tingimuseks (3.3), et f on piisavalt sile (Lipschitzi tingimus). Mastaabifunktsiooni piirang (3.4) on igati mõistlik. Näiteks iga kompaktsel kandjaga mastaabifunktsioon rahuldab antud tingimust vahemikus $0 < \varepsilon \leq 1$. Antud teoreem ütleb, et piisavalt suure j korral

$$y_j(k) = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \approx 2^{-j/2} f(2^{-j}k).$$

Antud valem annab loomuliku viisi arvutuste tegemiseks, kuna reaalselt andmeid töödeldes on funktsioonid tavaliselt antud väärtustena diskreetses punktides.

3.8 Süntees

Peale funktsiooni f dekompositsiooni võib rakendusi silmas pidades koefitsente $\{x_j(k)\}$ muuta. Kas siis mingite sageduste/suuruste rõhutamiseks või hoopis väikemaid neist nullides andmete pakkimise eesmärgil. Peale seda soovime saada funktsiooni (kordajad $y_j(k)$) tagasi, ehk sünteesida ta antud uutest kordajatest. Seda saab jälle teha läbi rekurrentse seose

$$y_j(k) = \sum_l u(k-2l)y_{j-1}(l) + v(k-2l)x_{j-1}.$$

Seega pole diskreetsel lainikeisendusel tegelikult vaja funktsioone φ ja ψ teada. Piisab ainult mastaabijadast $u(k)$.

