Ettekanne aines

Matemaatika seminar III:

"Variatsioonmeetodid"

Indrek Mandre <indrek@mare.ee>

29. september, 2009

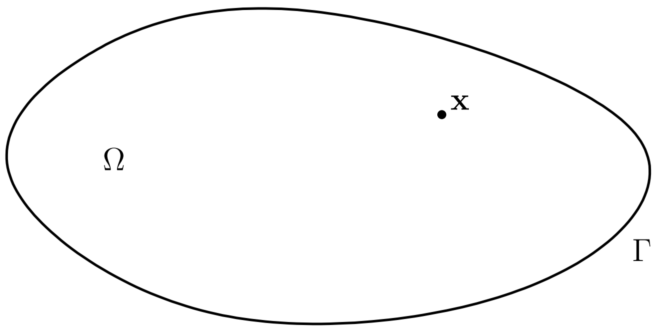
Kokkuvõte

Variatsioonmeetodid. Ülesande püstitus. Energiaruumid. Üldistatud ülesanne. Ritzi meetod. Muud meetodid. Kokkuvõte.

1 Ülesande klassikaline püstitus

1.1 Piirkond ja raja

Vaatame füüsikalisi protsesse, mis toimuvad mingis N-mõõtmelises piirkonnas $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Piirkonna Ω raja olgu Γ ja piirkonnas olevad punktid võime tähistada kui $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.



Joonis 1: Piirkond Ω, raja Γ, punkt $\mathbf{x}$.

Teeme järgmised eeldused:

- Ω on tõkestatud, s.t. sisaldub mingis N-mõõtmelises keras,
- Ω on sidus, s.t. koosneb ainult ühest tükist,
- Ω on lahtine, s.t. $\Omega \cap \Gamma = \emptyset$,
- Γ on tükati sile, s.t. näiteks $N = 2$ korral omab ainult lõpliku arvu murdepunkte, $N = 3$ korral lõpliku arvu murdejooni.

Erinevate mõõdete juhul on meil siis:

- $N = 1$ korral võime võtta lihtsa vahemiku $\Omega = (0, L)$, kus L on lõigu pikkus ja raja moodustavad otspunktid $\Gamma = \{0, L\}$.
- $N = 2$ puhul on tegu mingi tasandil asuva piirkonnaga, mida ümbritseb joon.
- $N = 3$ korral on tegu kolmemõõtmelises ruumis asuva piirkonnaga, mida ümbritseb mingi pind.

1.2 Diferentsiaalvõrrandid

Kirjeldame ruumis toimuvaid protsesse läbi diferentsiaalvõrrandite. Antud ettekandes vaatame ühte konkreetset statsionaarset klassikalist võrrandit:

$$-\nabla \cdot (a(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{1}$$

Anname antud võrrandile konkreetse füüsikalise interpretatsiooni. Olgu piirkond Ω mingi soojust juhtiv keha. Sellisel juhul:

- $u(\mathbf{x})$ on otsitav keha temperatuur ja nimetatakse primaarseks muutujaks,
- $f(\mathbf{x})$ on piirkonnas asuv soojusallikas,
- $\nabla u(\mathbf{x})$ on temperatuuri gradient ehk siis vektor selles suunas, kus temperatuur kõige kiiremini suureneb,
- $a(\mathbf{x})$ on soojusjuhtivustegur,
- $q(x) = -a(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})$ on soojusvoog, sekunaardne muutuja.

Antud füüsikaline kontekst ei ole ainuke, valemi muid rakendusi saab näha tabelis 2.

Protsess	Primaarne muutuja u	Tegur a	Sekundaarne muutuja $-a\nabla u(\mathbf{x})$	Allikas f
Soojuslevi	Temperatuur	k	Soojusvoog	Soojusallika tihedus
Kaablid	Ristsiire	T	Telgjõud	Vertikaalne jõud
Kang	Pikisiire	EA	Telgkoormus	Telgjõud
Vool torus	Hüdrostaatiline rõhk	$\frac{\pi D^4}{128\mu}$	Voolukiirus	Vedeliku allikas
Viskoosne vool	Kiirus	μ	Pinge	Rõhugradient
Elektrostaatika	Potentsiaal	ϵ	Elektrivoog	Laengutihedus

Tabel 2: Valemi (1) kasutus erinevate füüsikaliste protsesside korral. Siin k = soojusjuhtivustegur, T = pinge, E = Young'i moodul; A = läbilõike pindala, D = toru diameeter, μ = viskoossus, ϵ = dielektriline konstant.

1.3 Rajaülesanded

Tavaliselt saab ülesande püstitada järgmiselt: leida funktsioon u, mis vastab antud diferentsiaalvõrrandile piirkonnas Ω. Selleks, et seda ülesannet lahendada, on vaja veel natukene informatsiooni - rajatingimusi. Rajatingimused määravad, kuidas käitub u raja peal. Rajatingimused võivad olla erinevad ja erinevat tüüpi rajatingimustega ülesanded jaotuvad järgnevalt:

1. Dirichlet' ülesanne

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega; \\ u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma. \end{cases}$$

2. Neumanni ülesanne

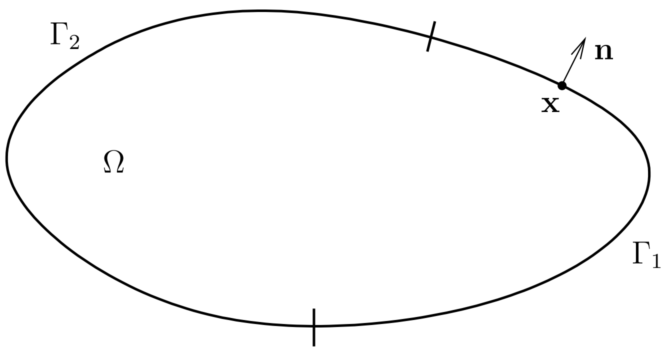
$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega; \\ -a(x)\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{n}}u(x) = h(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma; \end{cases}$$

kus $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$ on tuletis raja normaali suunas (joonis 2).

3. Segaülesanne

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega; \\ u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_1; \\ -a(x)\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{n}}u(x) = h(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_2; \end{cases}$$

kus $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ ja $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ ja $\Gamma_1 \neq \emptyset$ ja $\Gamma_2 \neq \emptyset$.



Joonis 2: Punkt $\mathbf{x}$ rajal, raja normaal $\mathbf{n}$, raja mitmes tükis.

Kui $g \equiv 0$ ja $h \equiv 0$, siis nimetatakse rajatingimusi homogeenseks.

Dirichlet ülesanne ja segaülesanne on üheselt lahenduvad, Neumanni ülesanne aga mitte. Kui u on mingi Neumanni ülesande lahend, siis on lahend ka $u + C$, kus C on mingi konstant. Neumanni ülesande lahendi ühesuse saamiseks võib sisse tuua lisatingimuse

$$\int_\Omega u(x)dx = 0.$$

2 Energiaruum, ülesande variatsioonpüstitused

2.1 Operaatorid, määramispiirkond

Diferentsiaalvõrrandeid saab kirja panna ka operaatorkujul:

$$Au = f, \quad u \in D_A, \tag{2}$$

kus meie näite puhul oleks

$$Au = -\nabla \cdot (a\nabla u).$$

Olgu H Hilberti ruum.

Operaator A on määratud selle ruumi mingil alamhulgal D_A, mida nimetame operaatori määramispiirkonnaks. Ehk siis

$$A \in \{(D_A \subseteq H) \to H\}.$$

Meie näite puhul võime võtta $H = L_2(\Omega)$, kus skalaarkorrutis on defineeritud kui

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

ja D_A'sse kuuluvad funktsioonid peavad olema kaks korda diferentseeruvad.

Operaatorit A nimetatakse *lineaarseks*, kui D_A on H lineaarne alamruum ja iga $u, v \in D_A$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$ korral $A(u + v) = Au + Av$ ja $A(\alpha u) = \alpha Au$.

Lineaarset operaatorit A nimetatakse *sümmeetriliseks*, kui

$$(Au, v) = (u, Av) \qquad \forall u, v \in D_A.$$

Sümmeetrilist operaatorit A nimetatakse *positiivseks*, kui

$$(Au, u) \geq 0, \qquad (Au, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

Sümmeetrilist operaatorit A nimetatakse *positiivselt määratuks*, kui leidub konstant $\mu > 0$, nii et

$$(Au, u) \geq \mu \|u\|^2.$$

2.2 Teoreem ruutfunktsionaali miinimumist

Teoreem: Olgu $A \in \{(D_A \subseteq H) \to H\}$ positiivne operaator ja $D_A \overset{d}{\subset} H$ (D_A on kõikjal tihe ruumis H ehk $\overline{D_A} = H$). Ruutfunktsionaal

$$Q(u) = (Au, u) - 2(f, u)$$

saavutab oma miinimumi elemendil u_0 siis ja ainult siis, kui u_0 on operaatorvõrrandi (2) lahend.

Ehk siis võrrandi (2) lahendi leidmine on samaväärne minimeerimisülesandega

$$\min Q(u), \qquad u \in D_A. \tag{3}$$

Ülesanne (3) on operaatorvõrrandi üks võimalikke variatsioonpüstitusi. Väljendid variatsioonpüstitus ja variatsioonmeetod tulenevad sellest, et matemaatilise füüsika ülesanne püstitatakse teatud funktsionaali minimeerimise ülesandena, kusjuures minimeerimisprotsess teostatakse otsitava lähislahendi varieerimisega.

Ruutfunktsionaali $Q(u)$ nimetatakse ka energiafunktsionaaliks. Ta on füüsikaliselt võrdeline uuritava süsteemi potentsiaalse energiaga. Ehk teisisõnu diferentsiaalvõrrandi lahendamise asemel saame tulemuse hoopis süsteemi potentsiaalse energia minimeerimisega.

2.3 Võrrandi (1) energiafunktsionaal ja energiaruum

Saab näidata, et meie võrrand (1) on positiivselt määratud, kui $a(x) \geq a_0 > 0$. See on mõistlik piirang, sest füüsikaliselt ei saa soojusjuhtivustegur negatiivseks minna.

Arvutame tema ruutfunktsionaali eeldades homogeenseid rajatingimusi.

Saame

$$\begin{aligned} Q(u) &= (Au, u) - 2(f, u) \\ &= -\int_\Omega \nabla \cdot (a(x)\nabla u(x))u(x)dx - 2\int_\Omega f(x)u(x)dx. \end{aligned}$$

Kasutame Greeni 1. valemit

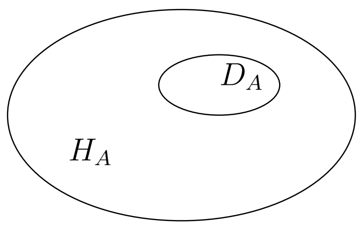
$$-\int_\Omega \nabla\cdot(a(x)\nabla u(x))V(x)dx = -\int_\Gamma a(x)\frac{d}{d\mathbf{n}}u(x)V(x)d\Gamma + \int_\Omega a(x)\nabla u(x)\cdot\nabla V(x)dx.$$

Seega

$$\begin{aligned} Q(u) &= -\int_\Gamma a(x)\frac{d}{d\mathbf{n}}u(x)u(x)d\Gamma + \int_\Omega a(x)\nabla u(x)\cdot\nabla u(x)dx - 2\int_\Omega f(x)u(x)dx \\ &= \int_\Omega a(x)\nabla u(x)\cdot\nabla u(x)dx - 2\int_\Omega f(x)u(x)dx \\ &= \int_\Omega a(x)|\nabla u(x)|^2dx - 2\int_\Omega f(x)u(x)dx. \end{aligned}$$

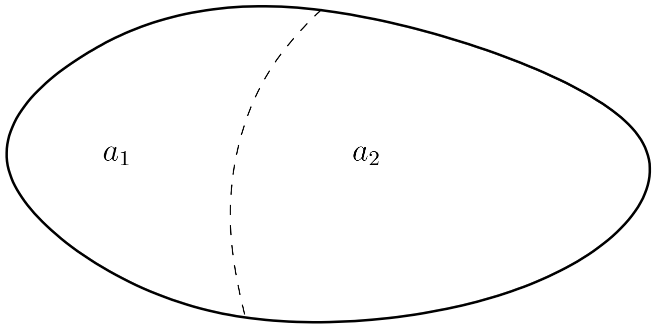
Vaatame saadud funktsionaali - seal on ainult esimest järku osatuletised! Samas meie originaalse valemi määramispiirkond sisaldab ainult funktsioone, mis on kaks korda diferentseeruvad. Tuleb välja, et me võime oma esialgset ülesannet laiendada, s.t. laiendada määramispiirkonda.

Energiafunktsionaali määramispiirkonda, mis on laiendatud hulgast D_A, nimetatakse energiaruumiks ja tähistatakse H_A.



Joonis 3: Laiendatud määramispiirkond.

Mis on samas antud lubatud lahendite füüsikaline interpretatsioon? Olgu meil soojust juhtiv keha, aga koosnegu see kahest osast, millel on erinev soojusjuhtivustegur. Kuigi temperatuur kehas on pidev suurus, siis soojusjuhtivustegur ei ole. Kuidas määrata rajatingimustest tulenev temperatuur kogu kehas? Seda ei saa teha kasutades ülesannet (1), samas läbi energiafunktsionaali on see võimalik.



Joonis 4: Piirkond, kus tegur a koosneb kahest osast.

Matemaatiliselt defineeritakse energiaruum H_A kui ruumi D_A täield (ruumi lisatakse punktid, mis teevad ta täielikuks), kus ruumi D_A skalaarkorrutis on defineeritud kui

$$(u,v)_A \equiv (Au,v).$$

Ruumi H_A normi

$$\|u\|_A \equiv \sqrt{(Au,u)}$$

nimetatakse ka energianormiks.

2.4 Sobolevi ruumid, paarisarvulist järku positiivselt määratud diferentsiaaloperaatorite energiaruum

Sobolevi ruumid koosnevad diferentseeruvatest funktioonidest

$$H^m(\Omega) = \{u \in \{\Omega \to \mathbb{R}\} : D^\alpha u \in L_2(\Omega) \text{ iga } \alpha \text{ korral, kus } |\alpha| \le m\},$$

milles norm on defineeritud kui

$$\|u\|_m = \left(\sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lisaks defineerime ruumid

$$C^k(\overline{\Omega}) = \{u \in \{\Omega \to \mathbb{R}\} : D^\alpha u \in C(\overline{\Omega}) \text{ iga } \alpha \text{ korral, kus } |\alpha| \le k\}.$$

Lause: Olgu H kas ruum $L_2(\Omega)$ või ruumi $L_2(\Omega)$ kinnine alamruum. Eeldame, et

$$A \in \{(D_A \subseteq H) \to H\}$$

on $2m$-järku positiivselt määratud diferentsiaaloperaator ja $D_A \overset{d}{\subset} H$ (on kõikjal tihe). Siis võrdub operaatori A energiaruum hulga D_A sulundiga ruumis $H^m(\Omega)$.

Meie ülesande jaoks tähendab see, et H_A on D_A sulund ruumis $H^1(\Omega)$.

2.5 Ülesande üldistatud püstitus

Teoreem: Olgu $A \in \{(D_A \subseteq H) \to H\}$ positiivselt määratud operaator Hilberti ruumis H, $D_A \overset{d}{\subset} H$ ja olgu H_A operaatorile A vastav energiaruum. Siis saavutab ruutfunktsionaal $Q(u)$ oma miinimumi elemendil u_0, mis on üldistatud ülesande

$$\text{leida } u_0 \text{ nii et kehtiks } (Au_0, v) = (f, v) \qquad \forall v \in H_A \tag{4}$$

üheseks lahendiks.

Operaatorvõrrandit $Au = f$, mille lahendit otsitakse hulgast D_A, nimetatakse vaadeldava matemaatilise füüsika ülesande klassikaliseks püstituseks ja tema lahendit (juhul kui see eksisteerib) klassikaliseks lahendiks.

Funktsionaali $Q(u)$ minimeerimisülesanded hulkadel D_A ja H_A ning üldistatud ülesanne (4) on operaatorvõrrandi $Au = f$ erinevad nn. variatsioonpüstitused.

Antud teoreem ütleb meile, et positiivselt määratud operaatori puhul on lahend energiaruumil olemas ja et lahend on ühene.

3 Ritzi meetod

3.1 Ritzi meetod positiivselt määratud operaatorite korral

Olgu A positiivselt määratud ja eeldame, et H_A on separaabel. See tähendab ta sisaldab loenduva, kõikjal tiheda hulga $\{v_n\}$, mille lõplikud alamhulgad ei ole lineaarselt sõltuvad - ja mida me kutsume antud ruumi baasiks. Igat otsitavat lahendit u saab kui tahes hästi lähendada baasielementide $v_i \in H_A$ lõplike lineaarsete kombinatsioonidega:

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} c_j v_j. \tag{5}$$

Intuitiivselt saame seega oletada, et lahendades ülesande mingis ruumi H_A n-mõõtmelises alamruumis, saame lähislahendi u_n, mis on otsitavale lahendile kuitahes ligidal. Olgu

$$H_A^n = span\{v_1, v_2, ..., v_n\}.$$

Asendame üldistatud ülesande (4) tema analoogiga ruumis H_A^n:

$$(u_n, v)_A = (f, v) \qquad \forall v \in H_A^n.$$

See ülesanne on samaväärne ülesandega

$$(u_n, v_i)_A = (f, v_i) \qquad \forall i = 1, 2, ..., n.$$

Asendades u_n-i siia, saame

$$\left(\sum_{j=1}^{n} c_j v_j, v_i \right)_A = (f, v_i), \qquad i = 1, 2, ..., n$$

ja tänu operaatori A lineaarsusele

$$\sum_{j=1}^{n} c_j (v_j, v_i)_A = (f, v_i), \qquad i = 1, 2, ..., n. \tag{6}$$

Tegemist on n võrrandist koosneva ja n tundmatut sisaldava lineaarse võrrandisüsteemiga otsitava lähislahendi koefitsentide c_j määramiseks. Antud võrrandisüsteemi saab ümber kirjutada maatrikskujul defineerides

$$[A] = \begin{pmatrix} (v_1, v_1)_A & \cdots & (v_n, v_1)_A \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (v_1, v_n)_A & \cdots & (v_n, v_n)_A \end{pmatrix},$$

$$[f] = \begin{pmatrix} (f, v_1) \\ (f, v_2) \\ \vdots \\ (f, v_n) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

ja saame maatriksvõrrandi

$$[A]\mathbf{c} = [f]. \tag{7}$$

Saame teha järgmised tähelepanekud:

- Maatriks $[A]$ on regulaarne, s.t. $\det[A] \neq 0$.
- Kuna skalaarkorrutis $(u, v)_A$ on sümmeetriline, siis on ka $[A]$ sümmeetriline.
- Kui me tahame arvutuste täpsust suurendada, siis suurendades n-i esialgsed arvutused säilivad ja peame ainult maatrikseid servadest laiendama.
- Juhul kui baas $\{v_i\}$ on ortonormeeritud, siis

  $$(v_j, v_i)_A = \delta_{ij}$$

  ning $[A]$ on ühikmaatriks ehk sellisel juhul

  $$\mathbf{c} = [f].$$

3.2 Ritzi meetodi koonduvus

Teoreem: Olgu $A \in \{(D_A \subseteq H) \to H\}$ positiivselt määratud operaator kõikjal tiheda määramispiirkonnaga D_A separaablis Hilberti ruumis H. Olgu H_A operaatori A energiaruum ja $\{v_n\}$ baas ruumis H_A. Siis koondub Ritzi meetodi lähislahendite jada protsessis $n \to \infty$ ülesande $Au = f$ üldistatud lahendiks u. Lisaks kui $m > n$, siis

$$\|u_m - u\| \leq \|u_n - u\|_A.$$

Seega suurendades elementide arvu lähendis (5) saame aina täpsema ja täpsema vastuse - tulemus koondub monotoonselt.

Seega koos eelnevate teoreemidega saame öelda, et positiivselt määratud operaatori korral lahend eksisteerib, lahend on ühene ja Ritzi meetodiga lahendi leidmisel tulemus koondub.

3.3 Näide

Vaatame homogeensete rajatingimustega ülesannet

$$\begin{cases} -u''(x) = 1, & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

See on meie ülesande (1) erijuht, kus

$$\begin{aligned} N &= 1, \\ a &= 1, \\ L &= 1, \\ \Omega &= (0,1), \\ \Gamma &= \{0,1\}, \\ f &= 1. \end{aligned}$$

Meil on

$$\begin{aligned} H &= L_2(0,1), \\ D_A &= \{u \in C^2[0,1] : u(0) = u(1) = 0\}, \\ H_A &= \{u \in H^1(0,1) : u(0) = u(1) = 0\}. \end{aligned}$$

Korrutame võrrandit skalaarselt funktsiooniga $v \in D_A$. Saame

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx = \int_0^1 v(x)dx.$$

Integreerime vasakut poolt ositi

$$-u'(x)v(x)|_0^1 + \int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 v(x)dx.$$

Vasakul olev avaldis on null ja meile jääb üldistatud ülesanne: leida $u \in H_A$, nii et kehtiks võrdus

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 v(x)dx \qquad \forall v \in H_A.$$

Valime baasiks ortogonaalsed elemendid, mis rahuldavad rajatingimusi. Võtame trigonomeetrilise baasi

$$B_A = \{\sin \pi nx : n = 1, 2, ...\}.$$

Lähislahendit otsime kujul

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} c_j \sin \pi jx \tag{8}$$

ja süsteem (6) näeb välja järgnev:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \int_0^1 (\sin \pi jx)' (\sin \pi ix)' \, dx = \int_0^1 \sin \pi ix dx, \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Vasakult poolt saame

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (\sin \pi jx)' (\sin \pi ix)' \, dx &= \pi^2 ij \int_0^1 \cos \pi jx \cos \pi ix dx \\
&= \frac{\pi^2}{2} ij \int_0^1 (\cos \pi x (j - i) + \cos \pi x (j + i)) \, dx \\
&= \frac{\pi^2}{2} ij \delta_{ij}.
\end{aligned}$$

Paremalt poolt saame

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sin \pi ix dx &= \frac{1}{i\pi} \int_0^{i\pi} \sin x dx \\
&= -\frac{1}{i\pi} \cos x \Big|_0^{i\pi} \\
&= \begin{cases} 0 & , i \text{ - paaris} \\ \frac{2}{i\pi} & , i \text{ - paaritu.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Kirjutame välja maatriksid $[A]$ ja $[f]$

$$[A] = \begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{4\pi^2}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{n^2\pi^2}{2} \end{pmatrix},$$

$$[f] = \begin{pmatrix} \frac{2}{\pi} \\ 0 \\ \frac{2}{3\pi} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Meil on tegu diagonaalmaatriksiga ja seega saame süsteemide (6) lahendi otse välja kirjutada:

$$c_i = \begin{cases} 0 & , i \text{ - paaris} \\ \frac{4}{i^3\pi^3} & , i \text{ - paaritu.} \end{cases}$$

Seega lähislahend (8) on

$$u_n = \frac{4}{\pi^3} \sum_{\substack{j=1 \\ paaritu}}^{n} \frac{1}{j^3} \sin \pi jx.$$

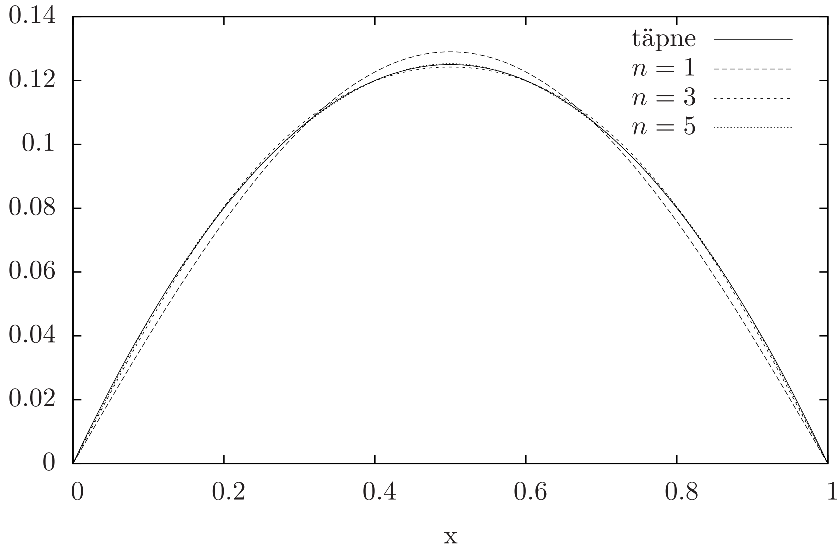
Näitel on olemas ka täpne lahend, mis on kujul

$$u = \frac{1}{2}\left(x - x^2\right).$$

Võrdleme tulemust erinevate n korral täpse lahendiga tabelis 3 ja joonisel 5.

	Ritzi lahend			Täpne
x	$n=1$	$n=3$	$n=5$	lahend
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.000
0.1	0.0399	0.0437	0.0448	0.045
0.2	0.0758	0.0804	0.0804	0.080
0.3	0.1044	0.1059	0.1048	0.105
0.4	0.1227	0.1199	0.1199	0.120
0.5	0.1290	0.1242	0.1253	0.125
0.6	0.1227	0.1199	0.1199	0.120
0.7	0.1044	0.1059	0.1048	0.105
0.8	0.0758	0.0804	0.0804	0.080
0.9	0.0399	0.0437	0.0448	0.045
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.000

Tabel 3: Ritzi meetodi tulemus võrreldes täpse lahendiga.



Joonis 5: Ritzi meetodi tulemus võrreldes täpse lahendiga.

3.4 Mittehomogeensed rajatingimused

Mittehomogeensete rajatingimuste korral saame teha asenduse

$$u = w + z,$$

kus $w \in D_A$ on mingi funktsioon, mis rahuldab ülesande rajatingimusi. Siit saame uue homogeensete rajatingimustega määramispiirkona D_A^0, kuhu kuuluvad funktsioonid z. Ruumi D_A^0 võtame aluseks energiaruumi H_A koostamisel.

3.5 Mittelineaarsed võrrandid

On võimalik leida lahendeid ka mittelineaarsetele võrranditele - siin asendatakse operaatori A positiivsuse eeldus tema monotoonsuse tingimusega.

4 Otsesed meetodid

Otsime lahendit kujul

$$u_n(\mathbf{x}) = \phi_0(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j(\mathbf{x}). \tag{9}$$

Siin ϕ_0 on mingi funktsioon, mis rahuldab ülesande rajatingimusi ja funktsioonid ϕ_j $(j \geq 1)$ rahuldavad homogeenseid rajatingimusi. Hulk $\{\phi_0, \phi_1, ...\}$ peab seega olema baasiks ruumis D_A, kusjuures element ϕ_0 on neis vabadusastmeta.

Meil on antud operaatorvõrrand

$$Au = f$$

ja meie eesmärk on minimeerida vahe

$$R(\mathbf{x}) = Au_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \Omega$$

leides vastavad koefitsendid c_j. $R(x)$ annab vahe mingis punktis, meie tahame seda teha mõistlikult väikeseks kogu piirkonnas Ω. Siin on palju erinevaid meetodeid, mis üldjuhul taanduvad n erineva võrrandi saamisele, mille lahenditeks on koefitsendid c_j.

4.1 Kaalutud hälbe meetod

Siin me eeldame lihtsalt, et $A \in \{(D_A \subseteq H) \to H\}$ ja olgu $\{\psi_n\} \subset H$ baas ruumis H. n võrrandit saame järgmiselt:

$$(Au_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}), \psi_i(\mathbf{x})) = 0, \qquad i = 1, 2, ..., n$$

ehk

$$\left(A \left(\phi_0(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j(\mathbf{x}) \right) - f, \psi_i(\mathbf{x}) \right) = 0, \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

4.2 Galjorkini meetod

Sarnane kaalutud hälbe meetodile. Olgu $D_A \overset{d}{\subset} H$. Siis on ruumi D_A baas ka ruumi H baasiks ja me võime võrrandite saamiseks kirjutada

$$\left(A \left(\phi_0(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j(\mathbf{x}) \right) - f, \phi_i \right) = 0, \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

4.3 Vähimruutude meetod

Idee on siin selles, et vahe vähenemisel peaks vähenema ka vahe norm. Ehk peame normi minimeerima otsitavate c_j suhtes. Koostatame minimeerimisülesande

$$\min \|Au_n - f\|$$

ja lahendame selleks võrrandisüsteemi

$$\nabla_{c_k} \left\| A\left(\phi_0(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j(\mathbf{x})\right) - f \right\|^2 = \mathbf{0}$$

ehk tavaliselt

$$\frac{\partial}{\partial c_j} \int_\Omega \left[A\left(\phi_0(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j(\mathbf{x})\right) - f \right]^2 dx = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

4.4 Kollokatsioonimeetod

Piirkonnast Ω valitakse n punkti $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n\}$ ja koostatakse n võrrandit:

$$Au_n(\mathbf{x}_j) - f(\mathbf{x}_j) = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

4.5 Osapiirkondade meetod

Siin jagatakse piirkond Ω n tükiks $\{\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n\}$ ja koostatakse iga tüki kohta üks võrrand:

$$\int_{\Omega_j} (Au_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}))\, dx = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n$$

ehk igas osapiirkonnas peab vea keskmine väärtus olema 0.

5 Kokkuvõte

Siin me vaatasime variatsioonmeetodeid, mis võimaldavad numbriliselt lahendada paljusid diferentsiaalvõrrandeid. Meetod võimaldab lahendada ka mittestatsionaarseid ülesandeid, mille korral kas laiendatakse piirkonda Ω ajaga - $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ või lahendatakse ülesanne iteratiivselt diskretiseerides tuletised aja järgi.

Meetodi suur puudus on, et keeruliste piirkondade Ω korral on baaside leidmine raske. Antud juhul kasutatakse kas diferentsmeetodeid või lõplike elementide meetodit. Lõplike elementide meetod jagab piirkonna osadeks ja rakendab iga osa peal variatsioonmeetodit eraldi jättes rajatingimused lahtiseks; edasi pannakse tulemused ühte suurde süsteemi.

Kasutatud kirjandus

[Janno] Jaan Janno, ”Variatsioonmeetodid”, 2001.

[Reddy1] J.N.Reddy, “Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering”, 1986.

[Reddy2] J.N.Reddy, “An Introduction to the Finite Element Method, third edition”, 2006.