Tallinna Tehnikaülikool
Matemaatikainstituut

Indrek Mandre
(YAFM 081797)

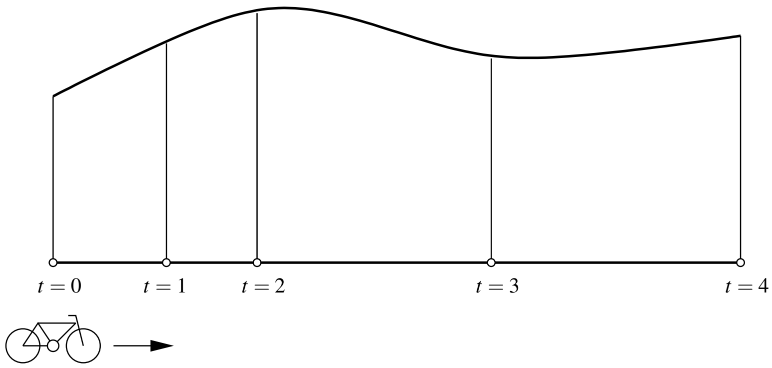
STIELTJESI INTEGRAAL

referaat õppeaines

Funktsionaalanalüüsi elemendid

Tallinn 2008

SISUKORD



JOONIS 1. Ratta liikumine piki aeda 4 sekundi jooksul.

1. SISSEJUHATUS

Et motiveerida Stieltjesi integraali, vaatame järgmist lihtsat näidet.

Näide 1. Kujutame ette, et me sõidame rattaga piki aeda ja igal ajahetkel saame mõõta aia kõrgust $f(t)$. Samas me ei liigu ühtlase kiirusega, vaid meie positsioon alguspunkti suhtes oleks samuti funktsioon ajast $\alpha(t)$. Alaku meie liikumine ajahetkel a ja lõppegu hetkel b. Meie eesmärk on leida aia pindala. Seda ei saa teha lihtsalt integreerides funktsiooni $f(t)$, kuna meie liikumise kiirus muutub. Vaadates joonist 1 võib näha, et eri ajahetkedele võib vastata erinev läbitud aia pikkus. Et hinnata aia pindala, jagame kogu aja intervallideks $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ ja moodustame summa:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\,[\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})] = \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta\alpha(t_k),$$

kus $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$. Antud summat nimetatakse Stieltjesi summaks ja antud formalismist saame hiljem Stieltjesi integraali $\int_a^b f(t)\, d\alpha(t)$.

2. MÕNED FUNKTSIOONIDE OMADUSED

Esitame siin mõned definitsioonid ja teoreemid ilma tõestuseta.

Definitsioon 1. Funktsiooni $f(x)$ nimetatakse *pidevaks* kohal a, kui $f(x)$ piirväärtus kohal a võrdub funktsiooni $f(x)$ väärtusega sellel kohal, s.o. kui

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Funktsioon on pidev lõigus $[a, b]$, kui ta on pidev selle lõigu igas punktis.

Definitsioon 2. Funktsioon $f(x)$ on *ühtlaselt pidev* lõigus $[a, b]$ siis ja ainult siis, kui iga etteantud positiivse arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub selline positiivne arv δ, et iga lõigus $[a, b]$ antud punktide x' ja x'' korral, mis rahuldavad tingimust $|x' - x''| < \delta$, kehtib

$$\left| f(x') - f(x'') \right| < \varepsilon.$$

Cantori teoreem:

Teoreem 1. *Kui funktsioon $f(x)$ on pidev lõigus $[a,b]$, siis on ta seal ka ühtlaselt pidev.*

Lagrange'i keskväärtusteoreem:

Teoreem 2. *Kui funktsioon $f(x)$ on pidev lõigus $[a,b]$ ja diferentseeruv vahemikus (a,b), siis leidub vähemalt üks selline punkt $c \in (a,b)$, mille puhul*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

3. Tõkestatud muuduga funktsioonid

Definitsioon 3. Olgu $[a,b]$ mingi lõik ja olgu meil lõplik hulk punkte

$$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\},$$

mis rahuldavad tingimusi

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Siis seda hulka P nimetatakse *alajaotuseks* üle $[a,b]$. Kõigi võimalike alajaotuste hulka üle lõigu $[a,b]$ tähistatakse $\mathscr{P}[a,b]$.

Kõrvuti asetsevate alajaotuse elementide vahet saame tähistada $x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$ ja nende elementide moodustatud lõiku $[x_{k-1}, x_k]$ nimetatakse alajaotuse *osalõiguks*. Alajaotuse P *normiks* nimetatakse maksimaalset alajaotuse kõrvuti asetsevate elementide vahelist kaugust ja tähistatakse $\|P\|$:

$$\|P\| = \max_{1 \le k \le n} \Delta x_k.$$

Alajaotuse P *peenenduseks* nimetatakse alajaotust P^*, kui kehtib $P \subseteq P^*$. Alajaotuse peenendamiseks nimetatakse protsessi, kus me lisame alajaotusse punkte. Järelikult alajaotuse peenendamise käigus alajaotuse norm väheneb. Seega

$$P \subseteq P^* \Rightarrow \|P^*\| \le \|P\|.$$

Definitsioon 4. Olgu meil lõigus $[a,b]$ määratud funktsioon $\alpha(x)$ ja tähistame $\Delta\alpha(x_k) = \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})$. Kui see funktsioon rahuldab selle lõigu iga alajaotuse P puhul tingimust

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta\alpha(x_k)| \le M,$$

siis öeldakse, et $\alpha(x)$ on *tõkestatud muuduga* lõigus $[a,b]$.

Teoreem 3. *Kui funktsioon $\alpha(x)$ on monotoonne lõigus $[a,b]$, siis on ta seal ka tõkestatud muuduga.*

Tõestus. Olgu $\alpha(x)$ monotoonselt kasvav. Siis iga $[a,b]$ alajaotuse jaoks on $\Delta\alpha(x_k) \geq 0$. Siit saame

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta\alpha(x_k)| = \sum_{k=1}^{n} \Delta\alpha(x_k) = \sum_{k=1}^{n} [\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})] = \alpha(b) - \alpha(a).$$

Võttes $M = \alpha(b) - \alpha(a)$, saame monotoonselt kasvava funktsiooni korral kirjutada

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta\alpha(x_k)| \leq M.$$

Sama moodi saab näidata teoreemi kehtivust monotoonselt kahaneva funktsiooni jaoks. □

Teoreem 4. *Olgu funktsioonid* $\alpha_1(x)$ *ja* $\alpha_2(x)$ *monotoonselt kasvavad lõigul* $[a,b]$. *Sellisel juhul on funktsioon* $\alpha(x) = \alpha_1(x) - \alpha_2(x)$ *seal tõkestatud muuduga.*

Tõestus. Kasutades $|s-t| = |s+(-t)| \leq |s| + |-t| = |s| + |t|$ saame

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |\Delta\alpha(x_k)| &= \sum_{k=1}^{n} |(\alpha_1(x_k) - \alpha_2(x_k)) - (\alpha_1(x_{k-1}) - \alpha_2(x_{k-1}))| \\
&= \sum_{k=1}^{n} |(\alpha_1(x_k) - \alpha_1(x_{k-1})) - (\alpha_2(x_k) - \alpha_2(x_{k-1}))| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} [|\alpha_1(x_k) - \alpha_1(x_{k-1})| + |\alpha_2(x_k) - \alpha_2(x_{k-1})|] \\
&= \sum_{k=1}^{n} |\Delta\alpha_1(x_k)| + \sum_{k=1}^{n} |\Delta\alpha_2(x_k)| \\
&= \alpha_1(b) - \alpha_1(a) + \alpha_2(b) - \alpha_2(a) \\
&= M.
\end{aligned}$$

□

Definitsioon 5. Olgu $\alpha(x)$ tõkestatud muuduga lõigus $[a,b]$ ja tähistame $\sum(P) = \sum_{k=1}^{n} |\Delta\alpha(x_k)|$ kasutades alajaotust P. Olgu arv $V_\alpha(a,b)$ defineeritud järgmiselt:

$$V_\alpha(a,b) = sup\left\{\sum(P) : P \in \mathscr{P}[a,b]\right\}.$$

Arvu $V_\alpha(a,b)$ nimetatakse funktsiooni $\alpha(x)$ *täismuuduks* lõigus $[a,b]$.

Teoreem 5. *Olgu* $\alpha(x)$ *tõkestatud muuduga lõigus* $[a,b]$ *ja võtame punkti* $c \in (a,b)$. *Sellisel juhul on* $\alpha(x)$ *tõkestatud muuduga lõikudes* $[a,c]$ *ning* $[c,b]$ *ja kehtib*

$$V_\alpha(a,b) = V_\alpha(a,c) + V_\alpha(c,b).$$

Tõestus. Kõigepealt tõestame, et $\alpha(x)$ on tõkestatud muuduga lõikudes $[a,c]$ ja $[c,b]$. Olgu P_1 alajaotus üle $[a,c]$ ja P_2 alajaotus üle $[c,b]$. Siis alajaotus $P_0 = P_1 \cup P_2$ on alajaotus üle lõigu $[a,b]$. Me saame kirjutada

$$\sum(P_1) + \sum(P_2) = \sum(P_0) \leq V_\alpha(a,b).$$

Seega summad $\sum(P_1)$ ja $\sum(P_2)$ on tõkestatud väärtusega $V_\alpha(a,b)$ ja see tähendab, et $\alpha(x)$ on tõkestatud muuduga lõikudes $[a,c]$ ja $[c,b]$. Samuti saame kirjutada

$$V_\alpha(a,c)+V_\alpha(c,b)\le V_\alpha(a,b). \tag{1}$$

Et saada vastupidist võrratust, olgu $P=\{x_0,x_1,...,x_n\}\in\mathscr{P}[a,b]$ ja olgu $P_0=P\cup\{c\}$ uus alajaotus. Juhul kui $c\in[x_{k-1},x_k]$, siis

$$\begin{aligned}|\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})| &= |\alpha(x_k)-\alpha(c)+\alpha(c)-\alpha(x_{k-1})|\le\\ &\le|\alpha(x_k)-\alpha(c)|+|\alpha(c)-\alpha(x_{k-1})|\end{aligned}$$

ja seega $\sum(P)\le\sum(P_0)$. Võttes $P_1=P_0\cap[a,c]$ ja $P_2=P_0\cap[c,b]$, on antud alajaotuste summad seotud järgnevalt:

$$\sum(P)\le\sum(P_0)=\sum(P_1)+\sum(P_2)\le V_\alpha(a,c)+V_\alpha(c,b).$$

Järelikult $V_\alpha(a,c)+V_\alpha(c,b)$ on ülemine tõke igale summale $\sum(P)$. Kuna see ei saa olla väiksem, kui vähim ülemine tõke, siis

$$V_\alpha(a,b)\le V_\alpha(a,c)+V_\alpha(c,b)$$

ja see koos valemiga (1) annab teoreemis esitatud võrduse. □

Teoreem 6. *Olgu $\alpha(x)$ tõkestatud muuduga lõigus $[a,b]$ ja olgu funktsioon $V(x)$ defineeritud lõigus $[a,b]$ järgmiselt: $V(x)=V_\alpha(a,x)$, kui $a<x\le b$, ja $V(a)=0$. Sellisel juhul*

(1) $V(x)$ on lõigus $[a,b]$ monotoonselt kasvav;
(2) $V(x)-\alpha(x)$ on lõigus $[a,b]$ monotoonselt kasvav.

Tõestus. Kui $a<x<y\le b$, siis kasutades teoreemi 5 saame kirjutada $V_\alpha(a,y)=V_\alpha(a,x)+V_\alpha(x,y)$ ehk $V(y)=V(x)+V_\alpha(x,y)$. See aga tähendab, et $V(y)-V(x)=V_\alpha(x,y)\ge 0$. Seega $V(x)\le V(y)$ ja esimene väide kehtib.

Et tõestada teist väidet, olgu $D(x)=V(x)-\alpha(x)$. Kui $a\le x<y\le b$, saame

$$D(y)-D(x)=V(y)-V(x)-[\alpha(y)-\alpha(x)]=V_\alpha(x,y)-[\alpha(y)-\alpha(x)]$$

Aga $V_\alpha(x,y)$ definitsioonist saame, et

$$\alpha(y)-\alpha(x)\le V_\alpha(x,y).$$

Seega $D(y)-D(x)\ge 0$ ja teine tingimus kehtib. □

Teoreem 7. *Olgu $\alpha(x)$ määratud lõigus $[a,b]$. $\alpha(x)$ on tõkestatud muuduga siis ja ainult siis, kui $\alpha(x)$ avaldub kahe monotoonselt kasvava funktsiooni vahena.*

Tõestus. Kui $\alpha(x)$ on tõkestatud muuduga lõigus $[a,b]$, siis me saame kirjutada $\alpha(x)=V(x)-D(x)$, kus $V(x)$ on funktsioon teoreemist 6 ja $D(x)=V(x)-\alpha(x)$. Nii $V(x)$ kui $D(x)$ on lõigus $[a,b]$ monotoonselt kasvavad. Teiselt poolt kui $\alpha(x)$

avaldub kahe monotoonselt kasvava funktsiooni vahena, siis ta on teoreemi 4 alusel tõkestatud muuduga. $\square$

Definitsioon 6. Funktsioon $\alpha(x)$ rahuldab *Lipschitzi tingimust*, kui iga x' ja x'' korral lõigus $[a,b]$ leidub konstant L, nii et

$$\left|\alpha(x') - \alpha(x'')\right| \leq L\left|x' - x''\right|.$$

Näide 2. Lõigus $[0,2]$ määratud funktsioon

$$\alpha(x) = \begin{cases} 2 & \text{, kui } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{, kui } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

ei rahulda Lipschitzi tingimust, kuna iga positiivse arvu $0 < \varepsilon \leq 1$ korral

$$\alpha(1) - \alpha(1+\varepsilon) = 1.$$

Et täita tingimust $1 \leq L\varepsilon$ piirprotsessis $\varepsilon \to 0$, peab $L \to \infty$.

Teoreem 8. *Iga funktsioon $\alpha(x)$, mis rahuldab Lipschitzi tingimust lõigus $[a,b]$, on seal tõkestatud muuduga.*

Tõestus. Saame kirjutada $|\Delta\alpha(x_k)| = |\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})| \leq L\,|x_k - x_{k-1}| = L\Delta x_k$. Summeerides üle alajaotuse saame

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta\alpha(x_k)| \leq \sum_{k=1}^{n} L\Delta x_k = L\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = L(b-a) = M.$$

$\square$

Teoreem 9. *Kui funktsioon $\alpha(x)$ on pidev lõigus $[a,b]$ ja kui funktsioonil $\alpha(x)$ on olemas tuletis $\alpha'(x)$, mis on lõigus (a,b) tõkestatud (see tähendab $|\alpha'(x)| \leq L$), siis $\alpha(x)$ rahuldab Lipschitzi tingimust.*

Tõestus. Kasutades Lagrange'i keskväärtusteoreemi (teoreem 2) saame iga $x', x'' \in [a,b]$ korral kirjutada

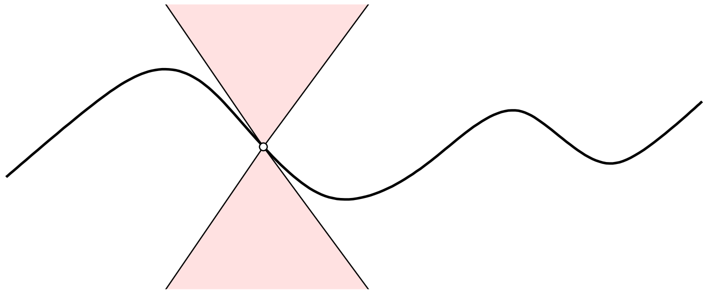
$$\alpha(x') - \alpha(x'') = \alpha'(\xi_k)(x' - x''),$$

kus $\xi_k \in (x', x'')$. Sellest saame

$$\left|\alpha(x') - \alpha(x'')\right| = \left|\alpha'(\xi_k)\right|\left|x' - x''\right| \leq L\left|x' - x''\right|.$$

$\square$

Pideva funktsiooni Lipschitzi tingimuse geomeetrilist interpretatsiooni saab vaadata jooniselt 2. Me saame asetada graafiku joone igasse punkti kahepoolsed koonused, nii et koonused ei kata graafiku joont. Seega joone tõus on tõkestatud.



JOONIS 2. Pideva funktsiooni Lipschitzi tingimuse geomeetriline interpretatsioon.

4. STIELTJESI INTEGRAALI MÕISTE

Olgu antud funktsioonid $f(x)$ ja $\alpha(x)$ lõigus $[a,b]$ ja olgu meil alajaotus P üle selle lõigu. Summat

$$S(P,f,\alpha) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta\alpha(x_k),$$

kus $\xi_k \in [x_{k-1},x_k]$, nimetatakse *Stieltjesi summaks.*

Definitsioon 7. Piirväärtust

$$\lim_{\|P\|\to 0} S(P,f,\alpha)$$

nimetatakse funktsiooni $f(x)$ *Stieltjesi integraaliks* funktsiooni $\alpha(x)$ järgi rajades a-st b-ni ja märgitakse sümboliga

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x).$$

Stieltjesi integraal eksisteerib ja tema väärtuseks on arv A

$$A = \lim_{\|P\|\to 0} S(P,f,\alpha),$$

kui on täidetud järgmine tingimus: iga etteantud positiivse arvu $\varepsilon > 0$ eksisteerib positiivne arv $\delta > 0$, nii et iga alajaotuse P korral, mis rahuldab tingimust $\|P\| < \delta$, kehtib

$$|S(P,f,\alpha) - A| < \varepsilon.$$

5. RIEMANNI INTEGRAAL KUI STIELTJESI INTEGRAALI ERIJUHT

Definitsioon 8. Olgu meil alajaotus P üle lõigu $[a,b]$. Summat

$$S(P,f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

kus $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, nimetatakse *Riemanni summaks*. Riemanni integraal on defineeritud

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\|P\| \to 0} S(P, f)$$

ja eksisteerib, kui iga etteantud $\varepsilon > 0$ korral leidub selline arv $\delta > 0$, nii et võrratusest $\|P\| < \delta$ järeldub $\left| S(P, f) - \int_a^b f(x)\, dx \right| < \varepsilon$.

Vaatame Stieltjesi summat $S(P, f, \alpha)$ ja olgu funktsioon $\alpha(x) = x + C$, kus C on suvaline konstant. Antud juhul

$$\Delta\alpha(x_k) = \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}) = x_k - x_{k-1} = \Delta x_k.$$

Siit saame

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta\alpha(x_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

ja seega Stieltjesi summa ühtib funktsiooni $f(x)$ Riemanni summaga $S(P, f)$:

$$S(P, f, \alpha) = S(P, f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Seega antud juhul Stieltjesi integraal taandub Riemanni integraaliks:

$$\lim_{\|P\| \to 0} S(P, f, \alpha) = \lim_{\|P\| \to 0} S(P, f) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Teisisõnu Riemanni integraal kujutab Stieltjesi integraali erijuhtu, kus

$$\alpha(x) = x + C.$$

Näide 3. Arvutame

$$\int_0^1 x^2\, d[x + e^3] = \int_0^1 x^2\, dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

6. Integraali omadusi

Esitame siin mõned Stieltjesi integraali elementaarsed omadused. Olgu funktsioonid $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\alpha(x)$, $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ määratud lõigus $[a, b]$ ja olgu c, c_1, c_2 konstandid. Stieltjesti integraalide olemasolu korral kehtivad järgmised omadused:

$$\int_a^b d\alpha(x) = \alpha(b) - \alpha(a), \tag{2}$$

$$\int_a^b f(x)\, d\,[\alpha(x) + c] = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x), \tag{3}$$

$$\int_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)]\, d\alpha(x) = c_1 \int_a^b f_1(x)\, d\alpha(x) + c_2 \int_a^b f_2(x)\, d\alpha(x), \tag{4}$$

$$\int_a^b f(x)\, d\,[c_1\alpha_1(x) + c_2\alpha_2(x)] = c_1 \int_a^b f(x)\, d\alpha_1(x) + c_2 \int_a^b f(x)\, d\alpha_2(x). \tag{5}$$

Valem (2):

$$\begin{aligned}\int_a^b d\alpha(x) &= \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\Delta\alpha_k \\ &= \lim_{\|P\|\to 0}[\alpha(b)-\alpha(a)] \\ &= \alpha(b)-\alpha(a).\end{aligned}$$

Valem (3):

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\, d[\alpha(x)+c] &= \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[\alpha(x_k)+c-\alpha(x_{k-1})-c] \\ &= \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})] \\ &= \int_a^b f(x)\, d\alpha(x).\end{aligned}$$

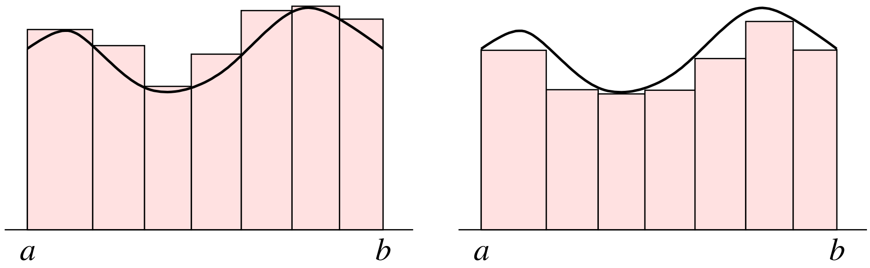
Valem (4):

$$\begin{aligned}\int_a^b [c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)]\, d\alpha(x) &= \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}[c_1 f_1(\xi_k)+c_2 f_2(\xi_k)]\Delta\alpha(x_k) \\ &= \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} c_1 f_1(\xi_k)\Delta\alpha(x_k)+\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} c_2 f_2(\xi_k)\Delta\alpha(x_k) \\ &= c_1\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f_1(\xi_k)\Delta\alpha(x_k)+c_2\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f_2(\xi_k)\Delta\alpha(x_k) \\ &= c_1\int_a^b f_1(x)\, d\alpha(x)+c_2\int_a^b f_2(x)\, d\alpha(x).\end{aligned}$$

Valem (5):

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(x)\, d[c_1\alpha_1(x)+c_2\alpha_2(x)] \\ =\; &\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x)[c_1\alpha_1(x_k)+c_2\alpha_2(x_k)-c_1\alpha_1(x_{k-1})-c_2\alpha_2(x_{k-1})] \\ =\; &\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x)[c_1\alpha_1(x_k)-c_1\alpha_1(x_{k-1})]+\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x)[c_2\alpha_2(x_k)-c_2\alpha_2(x_{k-1})] \\ =\; &c_1\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x)\Delta\alpha_1(x_k)+c_2\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x)\Delta\alpha_2(x_k) \\ =\; &c_1\int_a^b f(x)\, d\alpha_1(x)+c_2\int_a^b f(x)\, d\alpha_2(x).\end{aligned}$$

Valemeid (4) ja (5) saab tuletada mõlemat pidi, ehk Stieltjesi integraalide olemasolust paremal järeldub integraali olemasolu vasakul ja vastupidi.



JOONIS 3. Ülemine ja alumine integraal.

7. INTEGRAALI OLEMASOLUTEOREEMID

Meid huvitab, mis tingimustel Stieltjesi integraal eksisteerib ja mis on tema väärtus. Riemanni integraali puhul sai seda teha hinnates funktsiooni graafiku joone all olevat pindala läbi kahe Darboux' summa, s.t. jagades funktsiooni intervallideks ja iga intervalli puhul vaadates maksimaalset ning minimaalset funktsiooni väärtust (joonis 3). Kui piirprotsessis intervalle peenendades need kaks summat koondusid samaks väärtuseks, siis integraal eksisteeris. Stieltjesi integraali puhul kasutame sarnast meetodit.

Olgu meil lõigus $[a,b]$ määratud monotoonselt kasvav funktsioon $\alpha(x)$, tõkestatud funktsioon $f(x)$ ja alajaotus P. Tähistame

$$\begin{aligned} M_k(f) &= \max_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x), \\ m_k(f) &= \min_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x), \\ U(P,f,\alpha) &= \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\Delta\alpha(x_k), \\ L(P,f,\alpha) &= \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\Delta\alpha(x_k). \end{aligned}$$

On selge, et $L(P,f,\alpha) \le S(P,f,\alpha) \le U(P,f,\alpha)$. Tähistame $\omega_k(f)$ kui funktsooni $f(x)$ *võnkumise* osalõigus $[x_{k-1},x_k]$:

$$\omega_k(f) = M_k(f) - m_k(f).$$

Teoreem 10. *Alajaotuse P peenendamisel $U(P,f,\alpha)$ kahaneb monotoonselt ja $L(P,f,\alpha)$ kasvab monotoonselt.*

Tõestus. Olgu P_1 alajaotuse P peenendus, mis saadi ühe uue punkti t lisamisel alajaotusse P elementide x_{i-1} ja x_i vahele, ehk siis $t \in [x_{i-1},x_i]$. Olgu M_i' ja M_i''

funktsiooni $f(x)$ maksimumid vastavates lõikudes $[x_{i-1},t]$ ja $[t,x_i]$. Me saame kirjutada

$$U(P_1,f,\alpha)=\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} M_k(f(x))\Delta\alpha(x_k)+M_i'\left[\alpha(t)-\alpha(x_{i-1})\right]+M_i''\left[\alpha(x_i)-\alpha(t)\right].$$

Kuna aga $M_i'\leq M_i(f)$ ja $M_i''\leq M_i(f)$, siis

$$M_i'\left[\alpha(t)-\alpha(x_{i-1})\right]+M_i''\left[\alpha(x_i)-\alpha(t)\right]\leq$$
$$\leq M_i(f)\left[\alpha(t)-\alpha(x_{i-1})\right]+M_i(f)\left[\alpha(x_i)-\alpha(t)\right]=M_i(f)\Delta\alpha_k,$$

ja seega $U(P_1,f,\alpha)\leq U(P,f,\alpha)$.

Sama moodi olgu m_i' ja m_i'' funktsiooni $f(x)$ miinimumid vastavates lõikudes $[x_{i-1},t]$ ja $[t,x_i]$. Me saame kirjutada

$$L(P_1,f,\alpha)=\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} m_k(f(x))\Delta\alpha(x_k)+m_i'\left[\alpha(t)-\alpha(x_{i-1})\right]+m_i''\left[\alpha(x_i)-\alpha(t)\right].$$

Kuna aga $m_i'\geq m_i(f)$ ja $m_i''\geq m_i(f)$, siis

$$m_i'\left[\alpha(t)-\alpha(x_{i-1})\right]+m_i''\left[\alpha(x_i)-\alpha(t)\right]\geq$$
$$\geq m_i(f)\left[\alpha(t)-\alpha(x_{i-1})\right]+m_i(f)\left[\alpha(x_i)-\alpha(t)\right]=m_i(f)\Delta\alpha_k,$$

ja seega $L(P_1,f,\alpha)\geq L(P,f,\alpha)$. □

Teoreem 11. *Olgu P_1 ja P_2 suvalised alajaotused üle lõigu $[a,b]$. Siis kehtib*

$$L(P_1,f,\alpha)\leq U(P_2,f,\alpha)\quad \textit{ja}\quad L(P_2,f,\alpha)\leq U(P_1,f,\alpha).$$

Tõestus. Olgu alajaotus $P_3=P_1\cup P_2$. Teoreemi 10 järgi

$$L(P_2,f,\alpha)\leq L(P_3,f,\alpha)\leq U(P_3,f,\alpha)\leq U(P_1,f,\alpha)$$

ja

$$L(P_1,f,\alpha)\leq L(P_3,f,\alpha)\leq U(P_3,f,\alpha)\leq U(P_2,f,\alpha).$$

□

Definitsioon 9. *Ülemine* ja *alumine* Stieltjesi integraal on defineeritud vastavalt

$$\begin{aligned}\bar{I}(f,\alpha)&=\inf\{U(P,f,\alpha):P\in\mathscr{P}[a,b]\},\\ \underline{I}(f,\alpha)&=\sup\{L(P,f,\alpha):P\in\mathscr{P}[a,b]\}.\end{aligned}$$

Teoreem 12. *Ülemise ja alumise Stieltjesi integraali puhul kehtib*

$$\underline{I}(f,\alpha)\leq\bar{I}(f,\alpha).$$

Tõestus. Iga etteantud positiivse arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub selline alajaotus P_1, nii et

$$U(P_1, f, \alpha) < \bar{I}(f, \alpha) + \varepsilon.$$

Teoreemi 11 järgi on $\bar{I}(f,\alpha) + \varepsilon$ ülemine tõke kõikidele summadele $L(P, f, \alpha)$. Seega $\underline{I}(f,\alpha) < \bar{I}(f,\alpha) + \varepsilon$, ja kuna ε oli suvaline positiivne arv, siis $\underline{I}(f,\alpha) \leq \bar{I}(f,\alpha)$. □

Selle alusel saame öelda, et

$$L(P, f, \alpha) \leq \underline{I}(f,\alpha) \leq \bar{I}(f,\alpha) \leq U(P, f, \alpha)$$

ja

$$\bar{I}(f,\alpha) - \underline{I}(f,\alpha) \leq U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha).$$

Teoreem 13. *Kui funktsioon $f(x)$ on pidev ja $\alpha(x)$ on monotoonselt kasvav, siis $\underline{I}(f,\alpha) = \bar{I}(f,\alpha)$.*

Tõestus. Teoreemi 1 järgi on funktsioon $f(x)$ lõigus $[a,b]$ ka ühtlaselt pidev. Siis definitsiooni 2 kasutades saame valida suvalise positiivse arvu $\varepsilon > 0$, nii et leidub selline arv $\delta > 0$, et kehtib

$$0 \leq \omega_k(f) = M_k(f) - m_k(f) < \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a)},$$

kusjuures alajaotusel P on tingimus, et $\|P\| < \delta$. Siit saame

$$0 \leq U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k(f) \Delta\alpha(x_k) < \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a)} \sum_{k=1}^{n} \Delta\alpha(x_k) = \varepsilon.$$

Selle saame lihtsalt ümber kirjutada

$$(6) \quad 0 \leq (U(P, f, \alpha) - \bar{I}(f,\alpha)) + (\bar{I}(f,\alpha) - \underline{I}(f,\alpha)) + (\underline{I}(f,\alpha) - L(P, f, \alpha)) < \varepsilon.$$

Kuna iga sulgudes olev avaldis on positiivne, siis me võime kirjutada

$$0 \leq \bar{I}(f,\alpha) - \underline{I}(f,\alpha) < \varepsilon.$$

Kuna $\bar{I}(f,\alpha)$ ja $\underline{I}(f,\alpha)$ ei sõltu alajaotusest P ja ε võib olla suvaline posiitvne arv, siis $\bar{I}(f,\alpha) = \underline{I}(f,\alpha)$. □

Teoreem 14. *Kui funktsioon $f(x)$ on pidev ja $\alpha(x)$ on monotoonselt kasvav, siis*

$$\lim_{\|P\| \to 0} U(P, f, \alpha) = \lim_{\|P\| \to 0} L(P, f, \alpha) = \bar{I}(f,\alpha) = \underline{I}(f,\alpha).$$

Tõestus. Kasutades teoreemi 13 arutluskäiku, saame iga suvalise positiivse arvu $\varepsilon > 0$ korral leida sellise arvu $\delta > 0$, et iga alajaotuse P korral, mis rahduldab tingimust $\|P\| < \delta$, saame kasutades võrratust (6) kirjutada

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & U(P, f, \alpha) - \bar{I}(f,\alpha) & < & \varepsilon, \\ 0 & \leq & \underline{I}(f,\alpha) - L(P, f, \alpha) & < & \varepsilon, \end{array}$$

kusjuures $\|P\| < \delta$. Need võrratused aga vastavad antud piirprotsessidele. □

Teoreem 15. *Kui funktsioon $f(x)$ on lõigus $[a,b]$ pidev ja funktsioon $\alpha(x)$ on antud lõigus monotoonselt kasvav, siis Stieltjesi integraal $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$ on olemas.*

Tõestus. On selge, et $L(P,f,\alpha) \le S(P,f,\alpha) \le U(P,f,\alpha)$ ja kuna teoreemi 14 alusel ülemine ja alumine summa ligineb piirprotsessis $\|P\| \to 0$ samaks arvuks $\overline{I}(f,\alpha) = \underline{I}(f,\alpha)$, siis ka $S(P,f,\alpha)$ ligineb selleks samaks arvuks ja integraal eksisteerib. □

Teoreem 16. *Stieltjesi integraal $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$ on olemas, kui $f(x)$ on pidev ja $\alpha(x)$ on tõkestatud muuduga lõigus $[a,b]$.*

Tõestus. Oletame kõigepealt, et $\alpha(x)$ on monotoonselt kasvav lõigus $[a,b]$. Kasutades teoreemi 15 on Stieltjesi integraal siis olemas.

Juhul, kui $\alpha(x)$ ei ole monotoonselt kasvav, siis $\alpha(x)$ kui tõkestatud muuduga funktsioon avaldub kahe monotoonselt kasvava funktsiooni $\alpha_1(x)$ ja $\alpha_2(x)$ vahena, $\alpha(x) = \alpha_1(x) - \alpha_2(x)$ (teoreem 7). Teoreemi 15 põhjal on seega olemas Stieltjesi integraalid

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha_1(x) \text{ ja } \int_a^b f(x)\, d\alpha_2(x)$$

ja kasutades omadust (5)

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\, d\alpha_1(x) - \int_a^b f(x)\, d\alpha_2(x).$$

□

Stieltjesi integraali olemasoluks saab anda ka selge tarviliku ja piisava tingimuse.

Teoreem 17. *Funktsioonil $f(x)$ on Stieltjesi integraal monotoonselt kasvava funktsiooni $\alpha(x)$ järgi siis ja ainult siis, kui*

$$\lim_{\|P\|\to 0} (U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha)) = 0,$$

kusjuures

$$A = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = \overline{I}(f,\alpha) = \underline{I}(f,\alpha).$$

Tõestus. Tarvilikkus. Kui integraal eksisteerib, siis iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline $\delta > 0$, nii et iga alajaotuse P korral, kus $\|P\| < \delta$:

$$|S(P,f,\alpha) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ehk

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < S(P,f,\alpha) < A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Antud tingimustel leidub summasid $S(P,f,\alpha)$, kus punktid ξ_k on sellised, et nad on oma osalõikude maksimumid või miinimumid (summas $S(P,f,\alpha)$ võib iga ξ_k valida suvaliselt). Sellest aga saame

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < L(P,f,\alpha) \le U(P,f,\alpha) < A + \frac{\varepsilon}{2}$$

ehk
$$0 \le U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \varepsilon.$$

Piisavus. Teoreemi eeldusest saame, et iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline $\delta > 0$, nii et iga alajaotuse P, kus $\|P\| < \delta$, korral
$$0 \le \bar{I}(f,\alpha) - \underline{I}(f,\alpha) \le U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \varepsilon.$$
Mittenegatiivne arv saab olla väiksem kui suvaline positiivne arv ainult siis, kui ta on null. Seega piirprotsessis ülemine ja alumine summa koonduvad samaks arvuks
$$\bar{I}(f,\alpha) = \underline{I}(f,\alpha)$$
ja lisaks kuna $L(P,f,\alpha) \le S(P,f,\alpha) \le U(P,f,\alpha)$, siis peab ka integraali väärtus koonduma selleks samaks piirprotsessist sõltumatuks arvuks ja seega integraal eksisteerib. □

Teoreem 18. *Stieltjesi integraal $\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)$ on olemas, kui $f(x)$ on integreeruv Riemanni mõttes ja $\alpha(x)$ rahuldab Lipschitzi tingimust.*

Tõestus. Oletame kõigepealt, et Lipschitzi tingimust rahuldav funktsioon $\alpha(x)$ on monotoonselt kasvav. Et
$$\Delta\alpha(x_k) \le L\Delta x_k,$$
siis
$$U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k(f)\Delta\alpha(x_k) \le \sum_{k=1}^{n} \omega_k(f) L\Delta x_i = L\sum_{k=1}^{n} \omega_k(f)\Delta x_i.$$
Funktsiooni $f(x)$ Riemanni integreeruvuse tõttu Riemanni integraali ülemine ja alumine Darboux summa koonduvad piirprotsessis $\|P\| \to 0$ samaks arvuks, ja seega
$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega_k(f)\Delta x_k = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \left[M_k(f) - m_k(f)\right]\Delta x_k = 0$$
ja siis ka
$$\lim_{\|P\|\to 0} \left(U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha)\right) = 0.$$
Seega teoreemi 17 järgi on Stieltjesi integraal $\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)$ olemas.

Juhul kui $\alpha(x)$ ei ole monotoonselt kasvav, siis kirjutame
$$\alpha(x) = Lx - [Lx - \alpha(x)] = \alpha_1(x) - \alpha_2(x),$$
kus
$$\alpha_1(x) = Lx \text{ ja } \alpha_2(x) = Lx - \alpha(x).$$
Siin $\alpha_1(x)$ on monotoonselt kasvav ja rahuldab Lipschitzi tingimust lõigus $[a,b]$. Sama võib öelda ka funktsiooni $\alpha_2(x)$ kohta. Kui $x' > x$, siis
$$\alpha_2(x) - \alpha_2(x') = Lx - \alpha(x) - \left[Lx' - \alpha(x')\right] = L(x - x') - \left[\alpha(x) - \alpha(x')\right],$$

kus

$$\left|\alpha(x)-\alpha(x')\right| \leq L\left|x-x'\right|.$$

ja seega ühelt poolt $\alpha_2(x)-\alpha_2(x') \leq 0$ ehk $\alpha_2(x)$ on monotoonselt kasvav, teiselt poolt aga rahuldab $\alpha_2(x)$ ka Lipschitzi tingimust:

$$\begin{aligned}\left|\alpha_2(x)-\alpha_2(x')\right| &\leq L\left|x-x'\right|+\left|\alpha(x)-\alpha(x')\right| \\ &\leq L\left|x-x'\right|+L\left|x-x'\right| \;=\; 2L\left|x-x'\right|.\end{aligned}$$

Eelnenu põhjal on olemas Stieltjesi integraalid

$$\int_a^b f(x)\; d\alpha_1(x) \text{ ja } \int_a^b f(x)\; d\alpha_2(x)$$

ja siis omaduse (5) järgi ka integraal

$$\int_a^b f(x)\; d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\; d\alpha_1(x) - \int_a^b f(x)\; d\alpha_2(x).$$

□

Teoreem 19. *Olgu $\alpha(x)$ tõkestatud muuduga lõigus $[a,b]$. Kui eksisteerib Stieltjesi integraal $\int_a^b f(x)\; d\alpha(x)$ ja on antud punkt $c \in (a,b)$, siis eksisteerivad ka integraalid $\int_a^c f(x)\; d\alpha(x)$ ja $\int_c^b f(x)\; d\alpha(x)$ ja kehtib*

$$\int_a^b f(x)\; d\alpha(x) = \int_a^c f(x)\; d\alpha(x) + \int_c^b f(x)\; d\alpha(x). \tag{7}$$

Tuleb märkida, et teoreemi 19 valem (7) vastupidi ei pruugi toimida. See tähendab, et integraalide $\int_a^c f(x)\; d\alpha(x)$ ja $\int_c^b f(x)\; d\alpha(x)$ olemasolust ei järeldu integraali $\int_a^b f(x)\; d\alpha(x)$ olemasolu. Vaatame järgmist näidet.

Näide 4. Olgu antud

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, kui } a \leq x < c; \\ 0 & \text{, kui } x = c; \\ 1 & \text{, kui } c < x \leq b; \end{cases}$$

ja

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{, kui } a \leq x < c; \\ 1 & \text{, kui } x = c; \\ 1 & \text{, kui } c < x \leq b. \end{cases}$$

Integraal $\int_a^c f(x)\; d\alpha(x)$ eksisteerib, kuna $f(x)$ on pidev lõigus $[a,c]$ ja $\alpha(x)$ on seal monotoonne (teoreem 15). Samuti eksisteerib integraal $\int_c^b f(x)\; d\alpha(x)$, kuna $f(x)$ on integreeruv Riemanni mõttes ja $\alpha(x)$ rahuldab Lipschitzi tingimust.

Integraal $\int_a^b f(x)\; d\alpha(x)$ aga ei eksisteeri. Alati saame valida sellise alajaotuse P üle lõigu $[a,b]$, kusjuures $\|P\| < \delta$, nii et punkt $c \in (x_{i-1}, x_i)$, s.t. c asub mingi osalõigu i sees. Stieltjesi summas $\Delta\alpha(x_k) = 0$, kui $k \neq i$, ja seega

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta\alpha(x_k) = f(\xi_i)\Delta\alpha(x_i) = f(\xi_i)\cdot 1 = \begin{cases} 0 & \text{, kui } \xi_i \leq c; \\ 1 & \text{, kui } \xi_i > c. \end{cases}$$

Kuna see on vastuolus Stieltjesi integraali definitsiooniga piirväärtuse läbi (valida võib suvalise ξ_i osalõigu sees), siis integraali $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$ ei eksisteeri.

8. Ositi integreerimine

Teatud juhtudel järeldub Stieltjesi integraali $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$ olemasolust integraali $\int_a^b \alpha(x)\, df(x)$ olemasolu.

Teoreem 20. *Kui eksisteerib funktsiooni $f(x)$ Stieltjesi integraal funktsiooni $\alpha(x)$ järgi rajades a-st b-ni, siis eksisteerib funktsiooni $\alpha(x)$ Stieltjesi integraal funktsiooni $f(x)$ järgi rajades a-st b-ni, kusjuures*

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = f(x)\alpha(x)|_a^b - \int_a^b \alpha(x)\, df(x). \tag{8}$$

Tõestus. Oletame, et eksisteerib integraal $\int_a^b \alpha(x)\ df(x)$. Olgu meil alajaotus P punktidega $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ ja valime igas alajaotuse osalõigus punkti $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, kusjuures võtame $\xi_0 = a$ ja $\xi_n = b$. Moodustame integraali $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$ jaoks Stieltjesi summa

$$\begin{aligned}
S(P, f, \alpha) &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta\alpha(x_k) \;=\; \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\left(\alpha(x_k) - \alpha(\alpha_{k-1})\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\alpha(x_k) - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\alpha(x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} f(\xi_{k-1})\alpha(x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\alpha(x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=2}^{n} f(\xi_{k-1})\alpha(x_{k-1}) + f(\xi_n)\alpha(x_n) - f(\xi_1)\alpha(x_0) - \sum_{k=2}^{n} f(\xi_k)\alpha(x_{k-1}) \\
&= -\sum_{k=2}^{n} \alpha(x_{k-1})\left[f(\xi_k) - f(\xi_{k-1})\right] + f(\xi_n)\alpha(x_n) - f(\xi_1)\alpha(x_0) + \\
&\qquad + f(\xi_0)\alpha(x_0) - f(\xi_0)\alpha(x_0) \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \alpha(x_{k-1})\left[f(\xi_k) - f(\xi_{k-1})\right] + f(\xi_n)\alpha(x_n) - f(\xi_0)\alpha(x_0) \\
&= f(x)\alpha(x)|_a^b - \sum_{k=1}^{n} \alpha(x_{k-1})\Delta f(\xi_k).
\end{aligned}$$

Et $x_{k-1} \in [\xi_{k-1}, \xi_k]$, siis viimases valemis paremal olev summa kujutab funktsiooni $\alpha(x)$ Stieltjesi summat funktsiooni $f(x)$ järgi alajaotusega P^*, mis on määratud punktidega $a = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_n = b$, ehk me saame:

$$S(P, f, \alpha) = f(x)\alpha(x)|_a^b - S(P^*, \alpha, f). \tag{9}$$

Vaatame, kuidas mõjutab alajaotuse P norm $\|P\|$ alajaotuse P^* normi $\|P^*\|$. Kuna alajaotuse P^* punktid ξ_k asuvad alajaotuse P osalõikude $[x_{k-1}, x_k]$ sees, võivad kaks järjestikust punkti ξ_{k-1} ja ξ_k asuda teineteisest maksimaalsel kaugusel osalõikude $[x_{k-2}, x_{k-1}]$ ja $[x_{k-1}, x_k]$ eri otstes, ehk siis kui $\xi_{k-1} = x_{k-2}$ ja $\xi_k = x_k$. Sellisel juhul on nende vaheline kaugus

$$\Delta\xi_k = x_k - x_{k-2} = x_{k-1} - x_{k-2} + x_k - x_{k-1} = \Delta x_{k-1} + \Delta x_k \leq 2\,\|P\|\,.$$

See kehtib iga $\Delta\xi_k$ jaoks ja seega

$$\|P^*\| \leq 2\,\|P\|\,.$$

Antud võrratusest järeldub, et kui $\|P\| \to 0$, siis peab ka $\|P^*\| \to 0$. Seega minnes valemis (9) üle piirprotsessile $\|P\| \to 0$ saame:

$$\begin{aligned}
\lim_{\|P\|\to 0} S(P, f, \alpha) &= \lim_{\|P\|\to 0} f(x)\alpha(x)|_a^b - \lim_{\|P\|\to 0} S(P^*, \alpha, f) \\
&= f(x)\alpha(x)|_a^b - \lim_{\|P^*\|\to 0} S(P^*, \alpha, f) \\
&= f(x)\alpha(x)|_a^b - \int_a^b \alpha(x)\, df(x).
\end{aligned}$$

Kuna eelduse järgi paremal pool olev Stieltjesi integraal eksisteerib, siis peab eksisteerima ka vasakul olev Stieltjesi integraal. □

Näide 5. Lahendame

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, d\cos x = x\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = -\sin x|_0^{\frac{\pi}{2}} = -1.$$

9. Integraali teisendamine Riemanni integraaliks

Teatud juhtudel võib Stieltjesi integraalis kirjutada $d\alpha(x)$ asemele $\alpha'(x)\,dx$ ja selle läbi teisendada Stieltjesi integraal Riemanni integraaliks.

Teoreem 21. *Kui funktsioonil $f(x)$ on olemas Stieltjesi integraal funktsiooni $\alpha(x)$ järgi rajades a-st b-ni ja kui funktsioonil $\alpha(x)$ on olemas pidev tuletis $\alpha'(x)$, siis eksisteerib Riemanni integraal $\int_a^b f(x)\alpha'(x)\,dx$, kusjuures*

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x)\, dx. \tag{10}$$

Tõestus. Olgu $g(x) = f(x)\alpha'(x)$ ja vaatame Riemanni summat:

$$S(P, g) = \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\alpha'(\xi_k)\Delta x_k.$$

Sama alajaotust P ja samu punkte ξ_k saab kasutada, et moodustada Stieltjesi summa

$$S(P,f,\alpha)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta\alpha(x_k).$$

Kasutades Lagrange'i keskväärtusteoreemi saame kirjutada

$$\Delta\alpha(x_k)=\alpha'(\nu_k)\Delta x_k \quad , \text{kus } \; \nu_k\in(x_{k-1},x_k),$$

ja seega

$$S(P,f,\alpha)-S(P,g)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\left[\alpha'(\xi_k)-\alpha'(\nu_k)\right]\Delta x_k.$$

Kuna $f(x)$ on tõkestatud, on meil $|f(x)|\leq M$ kõigi x jaoks lõigus $[a,b]$. Edasi $\alpha'(x)$ pidevusest antud lõigus järeldub ühtlane pidevus lõigus $[a,b]$. Kasutades definitsiooni 2 saame, et iga antud $\varepsilon>0$ korral leidub selline arv $\delta>0$, nii et

$$|\xi_k-\nu_k|<\delta \quad\Rightarrow\quad \left|\alpha'(\xi_k)-\alpha'(\nu_k)\right|<\frac{\varepsilon}{2M(b-a)}.$$

Peenendades alajaotust P, nii et $\|P\|<\delta$, saame kirjutada

$$\begin{aligned}|S(P,f,\alpha)-S(P,g)| &\leq \sum_{k=1}^{n} M\left|\alpha'(\xi_k)-\alpha'(\nu_k)\right|\Delta x_k\\ &< \sum_{k=1}^{n} M\frac{\varepsilon}{2M(b-a)}\Delta x_k\\ &= \frac{\varepsilon}{2\,(b-a)}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k\\ &= \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

ehk

$$|S(P,g)-S(P,f,\alpha)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Samas Stieltjesi integraali olemasolust saame alajaotust P veel peenendada nii, et

$$\left|S(P,f,\alpha)-\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Need kaks võrratust kokku võttes (kasutades $a<b\wedge c<d\Rightarrow a+c<b+d$) saame

$$\begin{aligned}|S(P,g)-S(P,f,\alpha)|+\left|S(P,f,\alpha)-\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\right| &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2},\\ \left|S(P,g)-\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\right| &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Kasutades Riemanni integraali definitsiooni on see aga

$$\int_a^b g(x)\,dx=\lim_{\|P\|\to 0} S(P,g)=\int_a^b f(x)\,d\alpha(x).$$

$\square$

Näide 6. Lahendame näites 5 olnud integraali:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, d\cos x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,(-\sin x)\; dx = x\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\; dx = -\sin x|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Näide 7. Lahendame

$$\int_0^1 x\; de^x = \int_0^1 xe^x\; dx = xe^x|_0^1 - \int_0^1 e^x\; dx = e - e + 1 = 1.$$

10. Integreerimine tükati konstantse funktsiooni järgi

Olgu lõigus $[a,b]$ antud funktsioonid $f(x)$ ja $\alpha(x)$, millest esimese jaoks nõuame, et ta oleks pidev otspunktides a ja b, teine aga konstantne vahemikus (a,b), omades otspunktides a ja b mistahes väärtusi $\alpha(a)$ ja $\alpha(b)$. Sellisel juhul kehtivad järgmised tingimused

$$\Delta\alpha(x_2) = 0,\; \Delta\alpha(x_3) = 0,\; ...,\; \Delta\alpha(x_{n-1}) = 0.$$

Vaatame Stieltjesi summat

$$\begin{aligned} S(P,f,\alpha) &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta\alpha(x_k) \\ &= f(\xi_1)\Delta\alpha(x_1) + f(\xi_n)\Delta\alpha(x_n) \\ &= f(\xi_1)\left[\alpha(x_1) - \alpha(a)\right] + f(\xi_n)\left[\alpha(b) - \alpha(x_{n-1})\right]. \end{aligned}$$

Minnes üle piirprotsessile $\|P\| \to 0$, saame

$$\int_a^b f(x)\; d\alpha(x) = f(a)\left[\alpha(a+) - \alpha(a)\right] + f(b)\left[\alpha(b) - \alpha(b-)\right], \tag{11}$$

kus funktsiooni $\alpha(x)$ konstantsuse tõttu $\alpha(a+) = \alpha(b-)$.

Teoreem 22. *Kui funktsioon $f(x)$ on pidev lõigus $[a,b]$, funktsioon $\alpha(x)$ on aga konstantne igas osavahemikus (a,c_1), (c_1,c_2), ..., (c_m,b), kus $a = c_0 < c_1 < c_2 < ... < c_m < c_{m+1} = b$, siis*

$$\int_a^b f(x)\; d\alpha(x) = f(a)\left[\alpha(a+) - \alpha(a)\right] + \sum_{k=1}^{m} f(c_k)\left[\alpha(c_k+) - \alpha(c_k-)\right] + \\ + f(b)\left[\alpha(b) - \alpha(b-)\right]. \tag{12}$$

Tõestus. Et $\alpha(x)$ on tõkestatud muuduga, siis teoreemi 16 põhjal on olemas integraal $\int_a^b f(x)\; d\alpha(x)$ ja kasutades valemit (7) saame kirjutada

$$\int_a^b f(x)\; d\alpha(x) = \sum_{k=1}^{m+1} \int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)\; d\alpha(x).$$

Rakendades valemit (11) ja taandades sarnased liikmed, saame

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) &= \sum_{k=1}^{m+1} \{f(c_{k-1})\,[\alpha(c_{k-1}+)-\alpha(c_{k-1})]+f(c_k)\,[\alpha(c_k)-\alpha(c_k-)]\} \\
&= f(c_0)\,[\alpha(c_0+)-\alpha(c_0)]+f(c_1)\,[\alpha(c_1)-\alpha(c_1-)]+ \\
&\quad +f(c_1)\,[\alpha(c_1+)-\alpha(c_1)]+f(c_2)\,[\alpha(c_2)-\alpha(c_2-)]+\ldots+ \\
&\quad +f(c_{m-1})\,[\alpha(c_{m-1}+)-\alpha(c_{m-1})]+f(c_m)\,[\alpha(c_m)-\alpha(c_m-)]+ \\
&\quad +f(c_m)\,[\alpha(c_m+)-\alpha(c_m)]+f(c_{m+1})\,[\alpha(c_{m+1})-\alpha(c_{m+1}-)] \\
&= f(a)\,[\alpha(a+)-\alpha(a)]+f(c_1)\,[\alpha(c_1+)-\alpha(c_1-)]+ \\
&\quad +f(c_2)\,[\alpha(c_2+)-\alpha(c_2-)]+\ldots+f(c_{m-1})\,[\alpha(c_{m-1}+)-\alpha(c_{m-1}-)]+ \\
&\quad +f(c_m)\,[\alpha(c_m+)-\alpha(c_m-)]+f(b)\,[\alpha(b)-\alpha(b-)] \\
&= f(a)\,[\alpha(a+)-\alpha(a)]+\sum_{k=1}^{m} f(c_k)\,[\alpha(c_k+)-\alpha(c_k-)]+ \\
&\quad +f(b)\,[\alpha(b)-\alpha(b-)]\,.
\end{aligned}$$

□

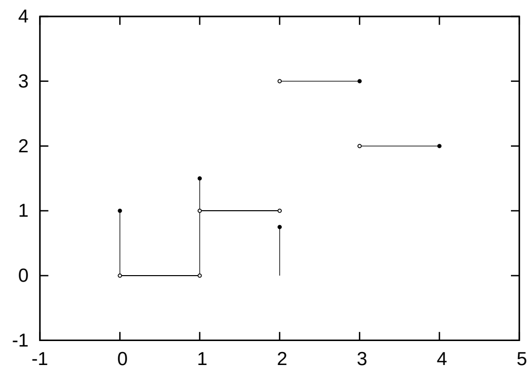
Näide 8. Lahendame integraali $\int_0^4 x\, d\alpha(x)$, kus $\alpha(x)$ on määratud lõigus $[0,4]$ järgnevalt:

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{, kui } x=0; \\ 0 & \text{, kui } x\in(0,1); \\ 1.5 & \text{, kui } x=1; \\ 1 & \text{, kui } x\in(1,2); \\ 0.75 & \text{, kui } x=2; \\ 3 & \text{, kui } x\in(2,3]; \\ 2 & \text{, kui } x\in(3,4]. \end{cases}$$

Funktsioon $\alpha(x)$ on kujutatud joonisel 4.

Rakendades valemit (12) saame

$$\begin{aligned}
\int_0^4 x\, d\alpha(x) &= f(0)\cdot(\alpha(0+)-\alpha(0))+f(1)(\alpha(1+)-\alpha(1-))+ \\
&\quad +f(2)(\alpha(2+)-\alpha(2-))+f(3)(\alpha(3+)-\alpha(3-))+ \\
&\quad +f(4)(\alpha(4)-\alpha(4-)) \;= \\
&= 0\cdot(0-1)+1\cdot(1-0)+2\cdot(3-1)+3\cdot(2-3)+4\cdot(2-2) \;= \\
&= 1+6-3 \;=\; 4.
\end{aligned}$$



JOONIS 4. Funktsiooni $\alpha(x)$ graafik.

11. INTEGREERIMINE TÜKATI PIDEVA TULETISEGA FUNKTSIOONI JÄRGI

Olgu meil lõigus $[a,b]$ antud pidev funktsioon $f(x)$ ja funktsioon $\alpha(x)$, mis omab kohal a väärtust α_a ja kohal b väärtust α_b ning omab vahemikus (a,b) väärtust $\alpha_2(x)$, kusjuures omagu funktsioon $\alpha_2(x)$ lõigus $[a,b]$ pidevat tuletist $\alpha_2'(x)$. Moodustame Stieltjesi summa:

$$S(P,f,\alpha) = f(\xi_1)\,[\alpha_2(x_1)-\alpha_a] + f(\xi_2)\Delta\alpha_2(x_2) + \ldots + \\ + f(\xi_{n-1})\Delta\alpha_2(x_{n-1}) + f(\xi_n)\,[\alpha_2(x_{n-1})-\alpha_b]\,.$$

Minnes üle piirprotsessile $\|P\| \to 0$ saame:

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = f(a)\,[\alpha_2(a+)-\alpha_a] + \int_{a+}^{b-} f(x)\,d\alpha_2(x) + f(b)\,[\alpha_b - \alpha_2(b-)]\,.$$

Kasutades paremal oleva integraali peal teoreemi 21, saame

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = f(a)\,[\alpha_2(a+)-\alpha_a] + \int_{a+}^{b-} f(x)\alpha_2'(x)\,dx + f(b)\,[\alpha_b - \alpha_2(b-)]\,.$$

Antud juhul on $f(x)\alpha_2'(x)$ pidev liikudes $x \to a+$ ja $x \to b-$ ja seega võib integraali sisse need punktid ka lisada. See tuleneb Riemanni summast - kui lisada summale antud äärekomponendid, ei anna nad piirprotsessis $\|P\| \to 0$ midagi juurde. Seega saame lõpptulemuseks

(13)
$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = f(a)\,[\alpha_2(a+)-\alpha_a] + \int_a^b f(x)\alpha_2'(x)\,dx + f(b)\,[\alpha_b - \alpha_2(b-)]\,.$$

Teoreem 23. *Kui funktsioon $f(x)$ on pidev lõigus $[a,b]$ ja funktsioon $\alpha(x)$ on antud järgmiselt, kasutades intervalle $a = c_0 < c_1 < ... < c_m < c_{m+1} = b$*

$$\alpha(x) = \begin{cases} y_0 & , \text{kui } x = a; \\ \alpha_1(x) & , \text{kui } a < x < c_1; \\ y_1 & , \text{kui } x = c_1; \\ \ldots & \\ \alpha_{m+1}(x) & , \text{kui } c_m < x < b; \\ y_{m+1} & , \text{kui } x = b; \end{cases}$$

ja omagu iga funktsioon $\alpha_k(x)$ pidevat tuletist vastavates lõikudes $[c_{k-1}, c_k]$. Sellisel juhul eksisteerib integraal $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$, kusjuures kehtib

(14)
$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = f(a)\,[\alpha(a+) - \alpha(a)] + \\ + \sum_{k=1}^{m} f(c_k)\,[\alpha(c_k+) - \alpha(c_k-)] + \sum_{k=1}^{m+1} \int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)\alpha_k'(x)\, dx + \\ + f(b)\,[\alpha(b) - \alpha_m(b-)]\,.$$

Tõestus. Funktsioon $\alpha(x)$ on tõkestatud muuduga. Järelikult antud integraal eksisteerib. Kasutades valemit (7), saame integraali jagada summaks

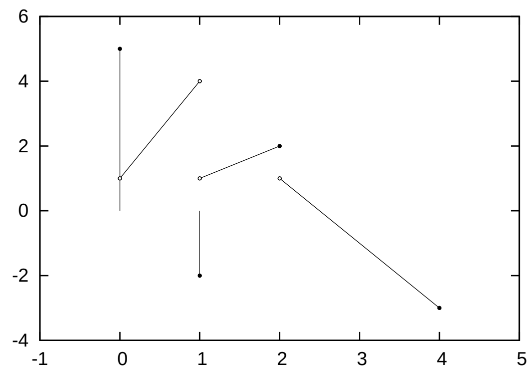
$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = \sum_{k=1}^{m+1} \int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)\, d\alpha(x).$$

Kasutades valemit (13) ja taandades sarnased liikmed (sarnaselt teoreemile 22) saamegi teoreemis esitatud valemi. □

Antud teoreem on teoreemi 22 üldistus.

Näide 9. Arvutame integraali $\int_0^4 x^2\, d\alpha(x)$, kus $\alpha(x)$ on antud järgnevalt:

$$\alpha(x) = \begin{cases} 5 & , \text{kui } x = 0; \\ 3x + 1 & , \text{kui } 0 < x < 1; \\ -2 & , \text{kui } x = 1; \\ x & , \text{kui } 1 < x \le 2; \\ 5 - 2x & , \text{kui } 2 < x \le 4. \end{cases}$$



JOONIS 5. Näite 9 funktsiooni $\alpha(x)$ graafik.

Funktsioon $\alpha(x)$ on kujutatud joonisel 5. Kasutades valemit (14) saame

$$\int_0^4 x^2\, d\alpha(x) = 0^2 \cdot [1-5] + 1^2 \cdot [1-4] + 2^2 \cdot [1-2] +$$

$$\int_0^1 3x^2\, dx + \int_1^2 x^2\, dx + \int_2^4 -2x^2\, dx + 4^2 \cdot [-3-(-3)] =$$

$$= 0 - 3 - 4 + 1 + \frac{7}{3} - \frac{112}{3} + 0 = -41.$$

12. TÜKATI PIDEVA FUNKTSIOONI INTEGREERIMINE

Olgu meil antud lõigus $[a,b]$ määratud funktsioonid $f(x)$ ja $\alpha(x)$, ja olgu $f(x)$ määratud lõigus $[a,b]$ järgnevalt:

$$f(x) = \begin{cases} f_a & \text{, kui } x = a; \\ f_2(x) & \text{, kui } a < x < b; \\ f_b & \text{, kui } x = b; \end{cases}$$

ja olgu $f_2(x)$ lõigus $[a,b]$ pidev. Lisaks olgu $\alpha(x)$ pidev punktides a ja b (paremalt ja vasakult poolt). Moodustame Stieltjesi summa integraalile $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$:

$$S(P,f,\alpha) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta\alpha(x_k).$$

Piirprotsessis $\|P\| \to 0$ summa kõige parem ja vasak element liginevad nullile, kuna $\alpha(x)$ pidevuse tõttu punktides a ja b vahed $\Delta\alpha(x_1)$ ja $\Delta\alpha(x_n)$ liginevad samas piirprotsessis samuti nullile, ja seega nende kahe elemendi ära jätmine ei muuda summa väärtust. Lisaks kuna $f_2(x)$ on pidev terves lõigus $[a,b]$, saame kirjutada:

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = \int_a^b f_2(x)\, d\alpha(x).$$

Integraal vasakul on olemas, kui on olemas integraal paremal. Lisaks juhul kui $f_a = f_2(x)$ või $f_b = f_2(x)$, siis kaob nõue $\alpha(x)$ pidevusest punktides a või b.

Teoreem 24. *Olgu antud lõigus $[a,b]$ määratud funktsioon $\alpha(x)$, mis on pidev punktis $c \in (a,b)$, ja samas lõigus tõkestatud funktsioon $f(x)$. Sellisel juhul*

$$\int_a^b f(x)\ d\alpha(x) = \int_a^c f(x)\ d\alpha(x) + \int_c^b f(x)\ d\alpha(x),$$

kusjuures vasakul olev integraal on olemas, kui on olemas integraalid paremal pool.

Näide 10. Lahendame integraali $\int_0^4 f(x)\ dx^2$, kus funktsioon $f(x)$ on antud järgnevalt:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{, kui } 0 \leq x < 2; \\ -3x & \text{, kui } 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Kasutades teoreemi 24 ja eelnevat arutelu, saame antud integraali jagada kaheks järgmiselt:

$$\int_0^4 f(x)\ dx^2 = \int_0^2 (3x+2)\ dx^2 + \int_2^4 (-3x)\ dx^2.$$

Edasi teisendame antud integraalid Riemanni integraalideks kasutades teoreemi 21:

$$\int_0^4 f(x)\ dx^2 = \int_0^2 (3x+2)\, 2x\ dx + \int_2^4 (-3x)\, 2x\ dx = -88.$$

13. VÕRDLUSTEOREEMID

Teoreem 25. *Olgu $\alpha(x)$ monotoonselt kasvav lõigus $[a,b]$. Kui eksisteerivad integraalid $\int_a^b f(x)\ d\alpha(x)$ ja $\int_a^b g(x)\ d\alpha(x)$ ja kui $f(x) \leq g(x)$ $(x \in [a,b])$, siis*

$$\int_a^b f(x)\ d\alpha(x) \leq \int_a^b g(x)\ d\alpha(x).$$

Tõestus. Iga alajaotuse P korral saame

$$S(P,f,\alpha) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta\alpha(x_k) \leq \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta\alpha(x_k) = S(P,g,\alpha).$$

Kuna see kehtib iga Stieltjesi summaga, kehtib ta ka piirprotsessis $\|P\| \to 0$. $\square$

Teoreem 26. *Olgu $\alpha(x)$ monotoonselt kasvav lõigus $[a,b]$. Kui eksisteerib integraal $\int_a^b f(x)\ d\alpha(x)$*, siis eksisteerib ka integraal $\int_a^b |f(x)|\ d\alpha(x)$ ja

$$\left| \int_a^b f(x)\ d\alpha(x) \right| \leq \int_a^b |f(x)|\ d\alpha(x).$$

Tõestus. Me saame kirjutada

$$M_k(f) - m_k(f) = \max\{f(x) - f(y) : x,y \in [x_{k-1},x_k]\}.$$

Kuna võrratus $||f(x)|-|f(y)|| \leq |f(x)-f(y)|$ kehtib alati, siis sellest järeldub, et

$$M_k(|f|)-m_k(|f|) \leq M_k(f)-m_k(f).$$

Korrutades $\Delta\alpha(x_k)$-ga ja summeerides, saame

$$U(P,|f|,\alpha)-L(P,|f|,\alpha) \leq U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)$$

iga alajaotuse P korral. Kasutades teoreemi 17 Stieltjesi integraal $\int_a^b |f(x)|\ d\alpha(x)$ eksisteerib. Teoreemis esitatud võrratuse saamiseks tuleb kasutada teoreemi 25: kuna $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, siis saame

$$-\int_a^b |f(x)|\ d\alpha(x) \leq \int_a^b f(x)\ d\alpha(x) \leq \int_a^b |f(x)|\ d\alpha(x)$$

ja kasutades $-a \leq b \leq a \Rightarrow |b| \leq a$ saame

$$\left|\int_a^b f(x)\ d\alpha(x)\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ d\alpha(x).$$

□

Teoreem 27. *Olgu funktsioon $f(x)$ pidev ja $\alpha(x)$ monotoonselt kasvav lõigus $[a,b]$. Siis*

$$\left|\int_a^b f(x)\ d\alpha(x)\right| \leq [\alpha(b)-\alpha(a)] \max_{a\leq x\leq b} |f(x)|.$$

Tõestus. Kasutades eelnevat teoreemi ja omadust 2, saame

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\ d\alpha(x)\right| &\leq \int_a^b |f(x)|\ d\alpha(x) \leq \\ &\leq \int_a^b \max_{a\leq x\leq b} |f(x)|\ d\alpha(x) = [\alpha(b)-\alpha(a)] \max_{a\leq x\leq b} |f(x)|.\end{aligned}$$

□

Teoreem 28. *Kui funktsioon $f(x)$ on pidev ja $\alpha(x)$ on tõkestatud muuduga lõigus $[a,b]$, siis kehtib võrratus*

$$\left|\int_a^b f(x)\ d\alpha(x)\right| \leq M \cdot V_\alpha(a,b), \tag{15}$$

kus

$$M = \max_{a\leq x\leq b} |f(x)|.$$

Tõestus. Stieltjesi summast saame

$$|S(P,f,\alpha)| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)|\,|\Delta\alpha(x_k)| \leq M \sum_{k=1}^{n} |\Delta\alpha(x_k)| \leq M \cdot V_\alpha(a,b).$$

Siin üle minnes piirprotsessile $\|P\| \to 0$, saamegi võrratuse (15). □

14. KESKVÄÄRTUSTEOREEMID

Teoreem 29. *Olgu funktsioon $f(x)$ pidev ja $\alpha(x)$ monotoonselt kasvav lõigus $[a,b]$. Sellisel juhul leidub selline punkt $\xi \in [a,b]$, nii et*

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = f(\xi)\int_a^b d\alpha(x) = f(\xi)[\alpha(b)-\alpha(a)]. \tag{16}$$

Tõestus. Kui $\alpha(a)=\alpha(b)$, siis $\alpha(x)$ on konstantne ja ükskõik millise ξ korral on võrduse (16) mõlemad pooled nullid ja teoreem kehtib. Olgu

$$M = \max_{a\le x\le b} f(x) \text{ ja } m = \min_{a\le x\le b} f(x).$$

Siis teoreemi 25 järgi saame funktsioonidest $m \le f(x) \le M$

$$m\,[\alpha(b)-\alpha(a)] \le \int_a^b f(x)\,d\alpha(x) \le M\,[\alpha(b)-\alpha(a)]\,.$$

Kuna pidev funktsioon $f(x)$ võtab kõik väärtused m ja M vahel vahemikus (a,b), siis peab seal olema selline punkt ξ, kus ta väärtus on

$$f(\xi) = \frac{1}{\alpha(b)-\alpha(a)}\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)$$

tingimusel $\alpha(a)\neq\alpha(b)$. □

Teoreem 30. *Olgu $f(x)$ monotoonselt kasvav ja $\alpha(x)$ pidev lõigus $[a,b]$. Sellisel juhul leidub punkt $\xi\in[a,b]$, nii et*

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = f(\alpha)\int_a^\xi d\alpha(x) + f(b)\int_\xi^b d\alpha(x).$$

Tõestus. Me saame teoreemide 20 ja 29 alusel kirjutada

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) &= f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha(x)\,df(x)\\ &= f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \alpha(\xi)\int_a^b df(x)\\ &= f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \alpha(\xi)f(b) + \alpha(\xi)f(a)\\ &= f(a)\,[\alpha(\xi)-\alpha(a)] + f(b)\,[\alpha(b)-\alpha(\xi)]\,.\end{aligned}$$

□

KASUTATUD KIRJANDUS

[1] G. Kangro, ”Matemaatiline analüüs, I osa”, 1965.

[2] David V. Widder, ”Advanced Calculus, second edition”, 1961.

[3] Tom M. Apostol, ”Mathematical Analysis, second edition”, 1974.

[4] S. C. Malik ja Savita Arora, “Mathematical Analysis”, 1992.

[5] Richard A. Silverman, ”Essential Calculus with Applications”, 1989.